

Tropfenbildung

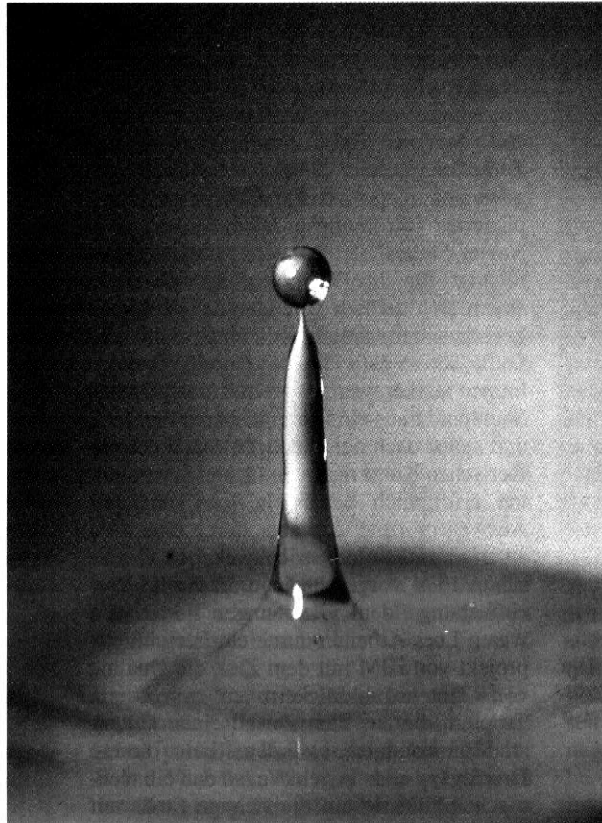
J. Eggers

Die Wirkungsweise von Rasensprengern, Parfumerstäubern oder Tintenstrahldruckern beruht auf der Oberflächenspannung. Diese führt dazu, daß sich ein Flüssigkeitsstrahl unter Verringerung der Oberfläche einschnürt und Tropfen bildet. In der Nähe des singulären Punktes, in dem sich ein Tropfen abtrennt, gelten selbstähnliche Lösungen der zugrundeliegenden Gleichungen, die unabhängig von den Anfangsbedingungen und der Art der Flüssigkeit sind.

Einleitung

Die Bildung von Tropfen begegnet uns überall im täglichen Leben. Die dahinter stehenden physikalischen Gesetze sind seit über 300 Jahren ein Gegenstand intensiver Forschung, und das Interesse an der Dynamik von Strömungen mit freier Oberfläche hat in den letzten Jahren sogar noch zugenommen. Dies liegt zum einen an der enormen technologischen Bedeutung der Tropfenbildung für Mischvorgänge, für das Sprühen sowie für die chemische Prozeßtechnik, die erkennbar wird durch Anwendungen in Tintenstrahldruckern, beim Faserspinnen sowie in der Halbleitertechnologie. Zum anderen hat die moderne Theorie nichtlinearer Phänomene das neue Konzept der Skaleninvarianz eingeführt, das auch diesem klassischen Problem neue Perspektiven eröffnet.

Dr. Jens Eggers, Universität Gesamthochschule Essen, Fachbereich Physik, D-45117 Essen



Die treibende Kraft hinter der Tropfenbildung ist die Oberflächenspannung und nicht die Schwerkraft, wie diese nach oben schießende Wasserfontäne, an deren Spitze sich ein Tropfen abschnürt, zeigt.

Die Tropfenbildung wurde in der wissenschaftlichen Literatur erstmals 1686 erwähnt, in einem Buch des Pariser Abtes Edme Mariotte über die Bewegung von Flüssigkeiten. Wie noch viele Autoren nach ihm, machte er das Fallen der Flüssigkeit im Schwerfeld für die Bildung von Tropfen verantwortlich. Man muß aber nur das obenstehende Bild betrachten, um zu sehen, daß sich ein Tropfen auch entgegen der Richtung der Schwerkraft ablösen kann. Zu sehen ist die Fontäne, die aus einem Wasserglas hervorschießt, nachdem ein Tropfen hineingefallen ist. Die treibende Kraft hinter dem Abschnüren ist vielmehr die Tendenz der Oberflächenspannung, die Oberfläche zu verkleinern, wie der belgische Mathematiker Jean Plateau im Jahre 1849 bemerkte. Dies liegt daran, daß es für ein Molekül der Flüssigkeit energetisch günstiger ist, von gleichartigen Molekülen umgeben zu sein, statt an Vakuum oder ein Gas anzugrenzen. Entsprechend

bezeichnet der Koeffizient der Oberflächenspannung γ diejenige Energie, die pro Flächeneinheit zur Erzeugung neuer Oberfläche aufzuwenden ist. Typische Werte sind $\gamma = 73 \text{ mN/m}$ für Wasser und $\gamma = 547 \text{ mN/m}$ für Quecksilber. Als einfachstes und wichtigstes Beispiel für die Bildung von Tropfen denke man sich einen Flüssigkeitsstrahl, der aus einer Düse schießt. Der entstehende Zylinder vom Radius r_Z soll in N Kugeln (Tropfen) vom Radius r_K zerfallen, wobei wir uns über die dafür verantwortliche Dynamik zunächst keine Gedanken machen wollen (s. Abb. 1). Die Zahl der Tropfen N ergibt sich bei gegebenem r_Z und r_K aus der Volumenerhaltung. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Gesamtoberfläche der Kugeln dann geringer als die des Zylinders ist, wenn $r_K > 3r_Z/2$ gilt, die Tropfen also hinreichend groß sind.

Zunächst scheinen also möglichst große Tropfen am günstigsten zu sein, da sie den größten Gewinn an Oberfläche liefern. Dies läßt aber den dynamischen Aspekt der Tropfenbildung außer acht, wie Lord Rayleigh in einer berühmten Arbeit aus dem Jahre 1879 gezeigt hat. Je größer nämlich die Tropfen, desto größer sind auch die zu überwindenden Trägheitskräfte zu ihrer Bildung. Es gibt also eine optimale Tropfengröße, die der am schnellsten anwachsenden Störung auf der Zylinderoberfläche entspricht. Bei einer realen Düse werden nämlich winzige Störungen jeder beliebigen Wellenlänge auf dem Strahl erzeugt. Diejenige Störung, die am schnellsten anwächst, bildet den Keim für einen Tropfen und bestimmt dessen Größe. Die Wellenlänge dieser „gefährlichsten“ Störung ist nach Rayleighs Rechnung $\lambda_R \approx 9r_Z$.

Die Zeitskala, auf der es zur Entstehung von Tropfen kommt, ergibt sich ebenso aus dem Gleichgewicht von Oberflächen- und Träg-

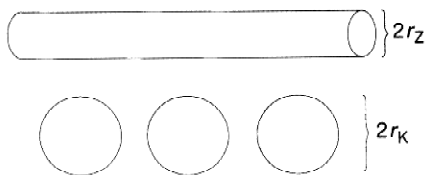


Abb. 1: Ein Flüssigkeitszylinder kann seine Oberfläche verringern, indem er in Tropfen mit Radius $r_k > 3r_z/2$ zerfällt. Daher treibt die Oberflächenspannung den Zerfall in Tropfen.

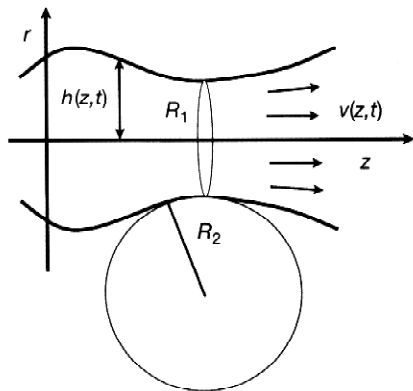


Abb. 2: Ein Ausschnitt aus einem radialsymmetrischen Flüssigkeitsstrahl, der sich mit dem lokalen Radius $h(z,t)$ und der axialen Geschwindigkeit $v(z,t)$ beschreiben läßt. Die Oberflächenkräfte sind proportional zur Summe der Krümmungen $1/R_1$ und $1/R_2$, also zur mittleren Krümmung.

heitskräften: Die einzige Zeitskala, die sich aus dem Koeffizienten der Oberflächenspannung γ , der Dichte ρ und dem Radius des Zylinders bilden läßt, ist

$$t_R = (r_z^3 \rho / \gamma)^{1/2} \quad (1)$$

Daraus lernt man zwei wichtige Dinge: Die Zerreivorgnge gehen sehr schnell vor sich, für Wasser und $r_z = 1$ mm ergibt sich beispielsweise $t_R = 4$ ms. So trennt sich im Titelbild ein Tropfen ab, bevor die Fontäne wieder in das Gefäß zurückfallen kann. Darüber hinaus nimmt die Zeitskala beim Einschnüren mit sich verkleinerndem Radius immer weiter ab, so daß sich der Vorgang beschleunigt und ein Tropfen sich in endlicher Zeit ablöst. Insbesondere dominiert die Oberflächenspannung schließlich jede äußere Kraft wie etwa die Schwerkraft, die also in der letzten Phase des Abschnrens keine Rolle mehr spielen kann. Wie wir sehen werden, wirkt der Oberflächenspannung nur noch die bremsende Wirkung der Trägheit und die Zähigkeit der Flüssigkeit entgegen.

Wir werden uns im folgenden vor allen Dingen der unmittelbaren Umgebung des Punk-

tes zuwenden, an dem sich ein Tropfen abschnürt. Wie sieht das Oberflächenprofil des Flüssigkeitsstrahls in der Nähe dieses Punktes aus? Wie hängt dies von den Anfangsbedingungen und der Art der Flüssigkeit ab? Was passiert, nachdem der Flssigkeitshals zerissen ist? Die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen ist wesentlich, wenn man den „Geburtsvorgang“ eines neuen Tropfens verstehen will.

Nichtlineare Dynamik der Tropfenbildung

Um genaueren Einblick in die Dynamik des Zerreißens eines Flüssigkeitsstrahls zu gewinnen, muß man offenbar ein hochkompliziertes Strömungsproblem lösen. Die Navier-Stokes-Gleichungen, ohnehin berüchtigt für ihre Komplexität, müssen in einem sich zeitlich verändernden Volumen gelöst werden, getrieben durch Oberflächenkräfte, die in der Nähe des Durchreipunkts immer stärker werden – vom analytischen Standpunkt aus ein fast unlösbares Problem, und selbst nach dem heutigen Stand der numerischen Kunst nur in einfachen Spezialfällen erfolgreich behandelt. Ein gangbarer Ausweg eröffnet sich aber durch eine vom amerikanischen Industriephysiker H. C. Lee schon 1974 vorgeschlagene drastische Vereinfachung der Gleichungen. Motiviert waren Lees Arbeiten durch ein Forschungsprojekt von IBM mit dem Ziel, die Qualität von Tintenstrahldruckern zu verbessern. Tropfen, die aus dem Zerfall eines Tintenstrahls kommen, werden bei diesem Druckertyp einzeln geladen, so daß ein elektrisches Feld sie auf die richtige Stelle auf dem Papier lenken kann. Der Zerfall eines Strahls ist aber nicht so einfach, wie in Abb. 1 suggeriert: Zwischen zwei Tropfen entsteht vielmehr häufig noch ein wesentlich kleinerer sogenannter Satellitentropfen, der wegen seiner kleineren Masse im elektrischen Feld eine andere Ablenkung erfährt. Dies begrenzt die mit dieser Technologie erreichbare Druckqualität; um Abhilfe zu schaffen, ist ein genaues Verständnis der dynamischen Ursachen von Satellitentropfen unerläßlich. Lee vermutete, daß die Strömung in einem dünnen Flüssigkeitsstrahl vorwiegend in Richtung z der Symmetrieachse verläuft. In dieser Näherung taucht neben dem lokalen Radius des Halses $h(z,t)$ nur noch die axiale Geschwindigkeit $v(z,t)$ auf (s. Abb. 2). Eine systematische Herleitung der Näherungsgleichungen gelang aber erst kürzlich – und unabhängig voneinander – einer Reihe von Autoren, wohl ein Zeichen dafür, daß die Zeit reif war [1 – 3].

Die genäherten Gleichungen lauten für einen axialsymmetrischen Strahl mit kinematischer Viskosität ν

$$\partial_t h^2 + \partial_z (v h^2) = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t v + v \partial_z v = -\frac{\gamma}{\rho} \partial_z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 3\nu \frac{\partial_z (\partial_z v h^2)}{h^2}. \quad (3)$$

Gleichung (2) drückt die Erhaltung der Masse aus: Fließt etwas in ein Flüssigkeitselement hinein, so muß der Radius zunehmen. Gleichung (3) ist eine Bilanz der Trägheitskraft (linke Seite), des Gradienten der Oberflächenkräfte (1. Term, rechte Seite) und der viskosen Reibung (2. Term, rechte Seite). Für Wasser ist z. B. $\nu = 0.01$ cm²/s, $\gamma/\rho = 73$ cm³/s², für Glycerin lauten die entsprechenden Werte 11.8 cm²/s und 50.3 cm³/s². Die Oberflächenkräfte sind nach der Laplaceschen Formel proportional zur mittleren Krümmung (s. Abb. 2). Für einen flachen Hals spielt nur der radiale Krümmungsradius R_1 eine Rolle, mit der anschaulichen Interpretation, daß eine Verkleinerung des Radius eine Verringerung der Oberfläche zur Folge hat.

Einen vorzüglichen Testfall für das Gleichungssystem (2) und (3) bietet das simple

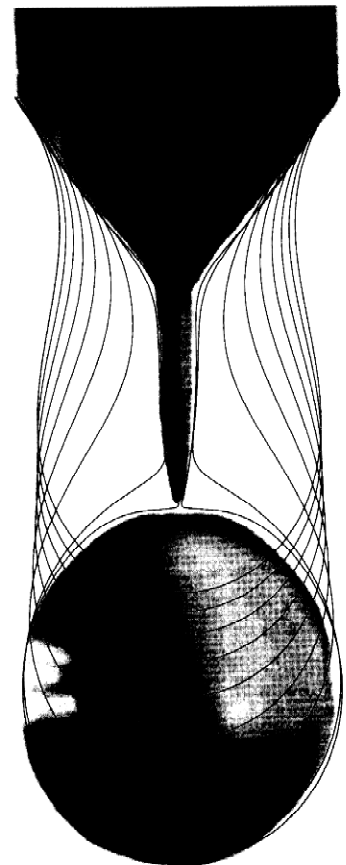


Abb. 3: Der tropfende Wasserhahn, das Paradaexperiment zur Tropfenbildung, hier realisiert durch eine Pipette mit 5 mm Durchmesser. Die Aufnahme entstand unmittelbar nachdem sich ein Tropfen abgelöst hat. Die durchgezogenen Linien sind Oberflächenprofile, die mit Gleichungen (2) und (3) berechnet wurden.

Experiment einer Pipette, aus der langsam Wasser fließt: der tropfende Wasserhahn. Am Anfang bleibt der Wassertropfen aufgrund der Oberflächenspannung an der Pipette hängen, wird aber schließlich durch nachfließendes Wasser zu schwer und fällt. Sobald ein kleiner Hals entstanden ist, beginnt die Oberflächenspannung diesen vollends abzuschneiden und überwiegt die Schwerkraft bald bei weitem. Abbildung 3 zeigt die Oberfläche kurz nach dem ersten Durchreißen: Ein fast runder Tropfen hat sich gerade von einer konischen Flüssigkeitsspitze abgespalten. Vergleicht man wieder mit dem Titelbild, so fällt eine verblüffende Ähnlichkeit ins Auge, nur daß der Tropfen dort auf der Spitze thronet. Die Schwerkraft spielt also tatsächlich nur eine untergeordnete Rolle, allein die Oberflächenspannung schafft diese eigentümlichen Formen. Nun versteht man auch die Herkunft der Satellitentropfen: Reißt der dünne Hals von Abb. 3 auch noch auf der oberen Seite, so bildet er schließlich einen sehr viel kleineren Tropfen, der immer gemeinsam mit dem Haupttropfen entsteht.

Ein scheinbar simpler Vorgang des täglichen Lebens bringt also Strukturen von überraschender Komplexität hervor. Nicht zuletzt in dieser Einsicht liegt der Reiz einer bemerkenswerten Arbeit von Howell Peregrine und zwei seiner Schüler [4], der das Photo des tropfenden Wasserhahns entnommen ist. Dem experimentellen Bild ist eine Serie von Profilen überlagert, die eine numerische Simulation der Gleichungen (2) und (3) liefert [2]. Offenbar geben auch diese vereinfachten Gleichungen noch alles wesentliche des Tropfvorgangs wieder. Wir sind auf der richtigen Fährte, und es lohnt sich, die Gleichungen näher zu analysieren.

Ähnlichkeitslösungen

Dazu wenden wir uns nun der unmittelbaren Umgebung des Punktes zu, in dem es zur Ablösung des Tropfens kommt. Da hier der Halsradius beliebig klein wird, dominiert die Oberflächenspannung alles andere, und allein ihr Wechselspiel mit den lokalen Eigenschaften der Flüssigkeit legt die Dynamik der Einschnürung fest. Wir haben bereits gesehen, daß die Flüssigkeit allein durch die kinematische Viskosität ν und durch das Verhältnis γ/ρ der Oberflächenspannung zur Dichte beschrieben wird. Die Einheiten sind cm^2/s bzw. cm^3/s^2 , es gibt also nur eine Kombination dieser Parameter, die eine Längen- bzw. Zeitskala ergibt, nämlich

$$\ell_v = \nu^2 \rho / \gamma \quad \text{und} \quad t_v = \nu^3 \rho^2 / \gamma^2. \quad (4)$$

Dies ist sehr anschaulich, denn je größer die Viskosität, desto größer ist t_v und desto langsamer (und auf größeren Längenskalen) spielen sich die Vorgänge ab. Für eine Flüssigkeit

geringer kinematischer Viskosität wie Wasser beträgt ℓ_v nur etwa 100 \AA , die letzten Stadien des Zerreißen spielen sich also auf Skalen ab, die sehr viel kleiner sind als die mm-Skalen in Abb. 3. Es ist demnach zweckmäßig, für eine experimentelle Untersuchung zähere Flüssigkeiten wie Glycerin zu verwenden, für das ℓ_v einige Zentimeter beträgt.

Schreibt man die Bewegungsgleichungen in Einheiten von ℓ_v und t_v , dann fällt jede Abhängigkeit von den Flüssigkeitsparametern heraus. Für die Beschreibung der Singularität ist ein Koordinatensystem angemessen, dessen Ursprung am Ort z_0 des Zerreißen liegt, und in dem die Zeit relativ zum Zeitpunkt t_0 dieses Ereignisses gemessen wird, d. h.

$$z' = (z - z_0) / \ell_v \quad \text{und} \quad t' = (t_0 - t) / t_v. \quad (5)$$

Die Skala der Koordinatenachsen wird durch ℓ_v und t_v festgelegt. Stellt man die Lösung in der Form

$$h(z, t) = \ell_v H(z', t') \quad (6)$$

$$v(z, t) = (\ell_v / t_v) V(z', t')$$

dar, so sollten die dimensionslosen Funktionen H und V unabhängig von der Art der Flüssigkeit sein und nur die Eigenschaften der Singularität beschreiben.

Bei diesem Stand der Dinge hat man es jedoch immer noch mit einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen für H und V zu tun. Wir sind aber lediglich an der Bewegung für sehr kleine Radien des Flüssigkeitshalses interessiert, die schließlich wesentlich kleiner werden als die Länge ℓ_v . Diese physikalische Situation ist – wenn auch in Umkehrung der Längenverhältnisse – analog dem Abkühlen eines Ferromagneten in die Nähe des kritischen Punktes, bei dem die Korrelationslänge sehr viel größer als jede andere charakteristische Längenskala des Systems wird. So wie dort thermodynamische Größen homogene Funktionen der

Wellenzahl und der inversen Korrelationslänge sind, ist hier die Bewegung eine homogene Funktion von z' und $t'^{1/2}$:

$$H(z', t') = t' \phi(z'/t'^{1/2}) \quad (7)$$

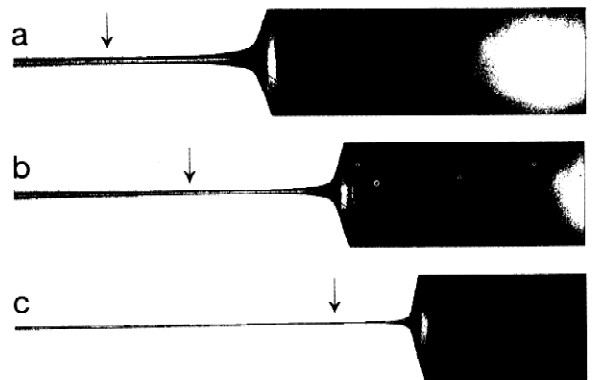
$$V(z', t') = t'^{-1/2} \psi(z'/t'^{1/2}).$$

Tatsächlich läßt sich durch Einsetzen verifizieren, daß der Ansatz (7) die Bewegungsgleichungen (2) und (3) löst. Die Werte der Exponenten ergeben sich aus der Bedingung, daß sich t' dabei herauskürzen muß.

Gleichung (7) bedeutet, daß sich die Lösung zu verschiedenen Zeiten nur durch ihre Skala unterscheidet. Vergleicht man beispielsweise die Oberflächenprofile zu einem Zeitpunkt t' und einem späteren Zeitpunkt $t'/2$, so unterscheiden sie sich nur durch eine Stauchung in radialer Richtung um einen Faktor $1/2$ (Faktor t' in der Gleichung für H) und in axialer Richtung um $1/\sqrt{2}$ (Faktor $t'^{1/2}$ im Argument von ϕ und ψ): Sie sind also selbstähnlich. Wie in der Theorie der kritischen Phänomene ist das Profil damit auf einen Satz Exponenten 1 , $1/2$ und $-1/2$ sowie Skalenfunktionen ϕ und ψ zurückgeführt. In der nichtlinearen Dynamik haben diese Ideen vor allen Dingen durch Kadanoff und seine Mitarbeiter [5] neue, fruchtbringende Anwendungen gefunden. Die Lösung (7) beschreibt wirklich das Zerreißen eines Flüssigkeitshalses: Der kleinste Halsdurchmesser geht mit dem zeitlichen Abstand von der Singularität t' linear gegen null, und die Geschwindigkeit divergiert wie $t'^{-1/2}$. Der kleiner werdende Flüssigkeitsrest, der im Halsbereich verblieben ist, wird nämlich durch immer stärkere Oberflächenkräfte zunehmend beschleunigt.

Aus der selbstähnlichen Form (7) folgt außerdem eine Differentialgleichung für die Skalenfunktionen ϕ und ψ , in denen nur noch das Argument $z'/t'^{1/2}$ vorkommt. Die Analyse dieser Gleichungen führt zum erstaunlichen Resultat, daß sie nur genau eine Lösung zulassen [6]. Dies bedeutet physikalisch, daß das Einschnüren völlig unabhän-

Abb. 4: Detailaufnahme eines leicht verdünnten Strahles aus Glycerin, $350 \mu\text{s}$ (a), $198 \mu\text{s}$ (b), und $46 \mu\text{s}$ (c) vom Durchreißen entfernt. Die Breite des Bildes beträgt 1 mm . Von dem im Entstehen begriffenen Tropfen sieht man nur einen kleinen Ausschnitt, da die Bilder oben und unten abgeschnitten sind. Der helle Punkt in den ersten beiden Bildern markiert die Mitte des Tropfens. Die durchgezogenen Linien sind das Ergebnis der Ähnlichkeitstheorie, der Pfeil markiert die dünnste Stelle.



gig von den Anfangsbedingungen wird. Zur Herleitung dieses Ergebnisses muß man noch eine physikalische Forderung an die Funktionen H und V stellen. Für große z' erwartet man nämlich, daß die Lösung unabhängig von t' wird. Dies ist Ausdruck der Tatsache, daß in einem endlichen Abstand vom Einschnürpunkt die Flüssigkeit der raschen Bewegung des Einschnürens nicht mehr folgen kann. Diese Forderung legt die Asymptotik der Skalenfunktionen ϕ und ψ für große Argumente fest, was bereits zur eindeutigen Berechnung der Lösung ausreicht. Die explizite Rechnung zeigt, daß der minimale Halsradius durch

$$h_{\min}(t) = 0.03 (\gamma/v\rho) (t_0 - t) \quad (8)$$

gegeben ist, um nur eine besonders interessante Größe herauszugreifen. Ein Glycerinstrahl hat demnach 1 ms vor dem Durchreißen einen minimalen Durchmesser von 5.2 μm , unabhängig vom anfänglichen Durchmesser des Strahls! Diese Vorhersage, und mit ihr das ganze berechnete Oberflächenprofil, ist kürzlich in einer Serie von außergewöhnlich eleganten Experimenten durch Tomasz Kowalewski bestätigt worden [7].

Bei diesen Experimenten wird ein Strahl aus Glycerin und Wasser beim Austritt aus der Düse periodisch gestört, so daß er mit derselben Frequenz in Tropfen zerfällt. In stroboskopischer Beleuchtung, die an die Anregungsfrequenz gekoppelt ist, sieht man also ein stehendes Bild. Indem man die Phase zwischen Anregung und Beleuchtung verschiebt, erzeugt man einen Film, der den Tropfenzerfall mit einer zeitlichen Auflösung von einigen μs zeigt. Abb. 4 zeigt das Ergebnis der Messungen für eine hochviskose Mischung zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. Zu sehen ist lediglich ein kleiner Ausschnitt des Strahls in der Umgebung des Punktes, in dem sich ein Tropfen ablöst. Der Durchmesser des ungestörten Strahls beträgt 0.4 mm, etwa die Hälfte der Bildbreite. Die Düse befindet sich einige Zentimeter links vom gezeigten Ausschnitt. Von dem Tropfen, der dabei ist sich abzuschnüren, sieht man nur einen kleinen Ausschnitt rechts im Bild. Sein Mittelpunkt ist in der Durchlichtaufnahme als heller Fleck zu erkennen. Den experimentellen Aufnahmen sind die theoretischen Vorhersagen überlagert, die als Linien zu sehen sind. Da $t_0 - t$ bekannt ist, gibt es keine anpaßbaren Parameter. Die Flüssigkeit hat sich zu einem dünnen Faden ausgezogen, was sofort aus der Skalierung von Gleichung (7) folgt. Jeder kennt diese Fäden hochviskoser Flüssigkeiten von morgendlichen Experimenten am Frühstückstisch. Die Profile sind unabhängig vom Düsendurchmesser, wie durch das Experiment bestätigt wird [7]. Auf der richtigen Skala betrachtet, werden also alle Zerreißvorgänge durch eine universelle Skalentheorie beschrieben.

Ausblick

Wir haben gesehen, daß die Bildung eines Tropfens durch eine singuläre Lösung der hydrodynamischen Gleichungen beschrieben wird, die formal zu divergierenden Geschwindigkeiten führt. Darin liegt kein Widerspruch, da die Lösung spätestens dann ihre Gültigkeit verliert, wenn der Halsdurchmesser molekulare Dimensionen erreicht. Bemerkenswerterweise gelingt es trotzdem, auch die Bewegung *nach* dem Zerreißen allein durch die Kontinuumstheorie zu beschreiben, ohne auf mikroskopische Details Rücksicht nehmen zu müssen. Dies liegt daran, daß nach dem Zeitpunkt t_0 die Lösung, die nun aus zwei getrennten Teilen besteht, durch die Bewegung vor dem Zerreißen eindeutig festgelegt wird [8]. Nach dem Verstreichen einer mikroskopischen Zeit ist die Kontinuumstheorie also wieder gültig und hat alle mikroskopischen Details „vergessen“. Singularitäten, die man häufig mit dem Zusammenbrechen einer mathematischen Beschreibung assoziiert, beschreiben hier (und in vielen anderen Beispielen aus der Hydrodynamik!) also einen realen physikalischen Vorgang.

Dies und viele weitere Aspekte der Tropfendynamik sind in einem umfassenderen Übersichtsartikel dargestellt, der demnächst erscheint [8]. Eine besonders faszinierende jüngere Entwicklung ist die von Michael Brenner durchgeführte Stabilitätsanalyse der Ähnlichkeitslösungen. Die in Abb. 4 gezeigten Fäden erweisen sich nämlich als außerordentlich empfindlich gegen Störungen, so daß sie bei einem Durchmesser von einigen μm bereits durch thermische Fluktuationen destabilisiert werden. An der Stelle, an der eine Störung wächst, wird das Durchreißen beschleunigt. Also entsteht dort ein neuer Hals, der auf dem bestehenden Hals zu wachsen beginnt und wiederum die Form einer Ähnlichkeitslösung hat. Dieses Spiel setzt sich auf dem soeben neu entstandenen Hals fort, und es sind vier Generationen von Halsen beobachtet worden [9]. So entsteht ein statistisches Ensemble verschachtelter Singularitäten, das die makroskopisch beobachtbare Folge mikroskopischer Fluktuationen darstellt.

Ein weiteres aktives Forschungsgebiet ist die Berücksichtigung des Einflusses einer umgebenden Flüssigkeit auf den Tropfenzerfall. Dies ist wesentlich für die Erzeugung von Dispersionen zweier nicht mischbarer Flüssigkeiten. Besondere technologische Bedeutung kommt auch dem Zerfall eines Flüssigkeitsstrahls in starken elektrischen Feldern zu. So entstehen sehr viel feinere Sprays, als sie der hier beschriebene Rayleigh-Zerfall erlauben würde. Schließlich ist es von großem Interesse, den Einfluß der in der Chemie allgegenwärtigen Makromoleküle auf die Strömung zu untersuchen. Diese Mo-

leküle werden beim Zerfall eines Strahls gestreckt und widersetzen sich so dem Zerreißen. So entstehen neue Zerfallsmuster in Form einer Perlenkette von Tropfen, die durch fast zylindrische Fäden verbunden sind.

In all diesen Beispielen ergeben sich neue und fundamentale physikalische Fragen, die zum größten Teil noch unbeantwortet sind. Daneben wird die Umsetzung auf Anwendungen in Physik, Chemie und den Ingenieurwissenschaften eine der Herausforderungen der Zukunft sein.

Literatur

- [1] S. E. Bechtel, M. G. Forest u. K. J. Lin, *SAACM* **2**, 59 (1992).
- [2] J. Eggers u. T. F. Dupont, *J. Fluid Mech.* **262**, 205 (1994).
- [3] F. J. Garcia u. A. Castellanos, *Phys. Fluids* **6**, 2676 (1994).
- [4] D. H. Peregrine, G. Shoker u. A. Symon, *J. Fluid Mech.* **212**, 25 (1990).
- [5] A. L. Bertozzi, M. P. Brenner, T. F. Dupont u. L. P. Kadanoff, in „Trends and Perspectives in Applied Mathematics“, Applied Mathematics Series, Vol. **100** hrsg. von L. Sirovich (Springer, New York), S. 155 (1994).
- [6] J. Eggers, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3458 (1993).
- [7] T. A. Kowalewski, *Fluid Dyn. Res.* **17**, 121 (1996).
- [8] J. Eggers, *Rev. Mod. Phys.*, (Juli 1997).
- [9] X. D. Shi, M. P. Brenner u. S. R. Nagel, *Science* **265**, 157 (1994).