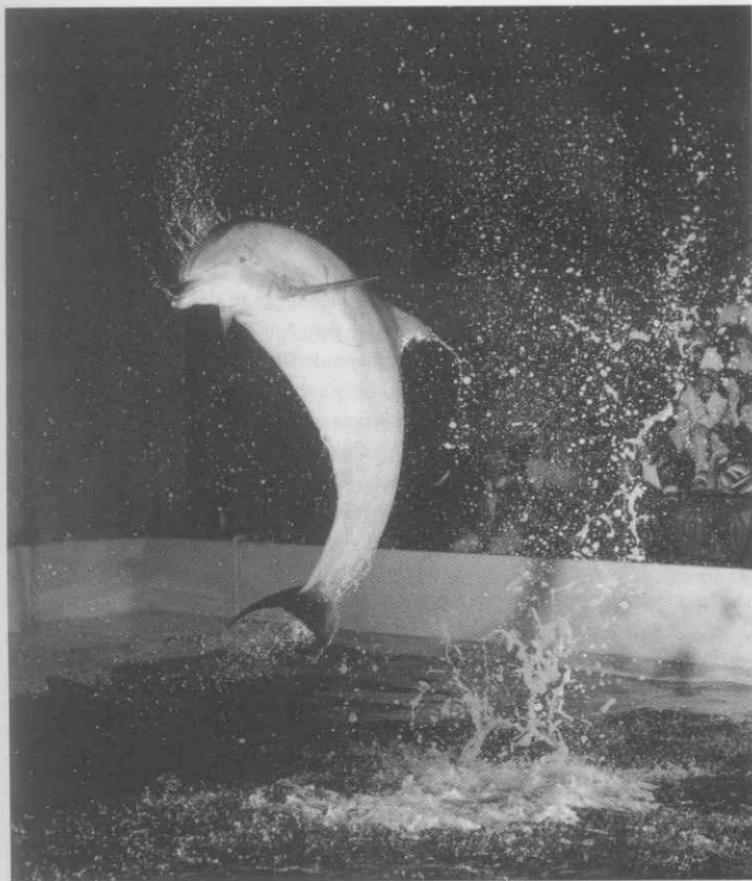


## Von der Geburt eines Tropfens

Tropfen entstehen überall. Dafür kann es kaum eine eindrucksvollere Illustration geben als das Bild des Pioniers der Kurzzeitfotografie, Harold Edgerton. Beim Sprung aus dem Becken des New England Aquariums in Boston erzeugt der Delphin eine Wolke von Tropfen, die im Lichtblitz des Fotografen aufleuchten. Der Zerfall in Tropfen geht zwangsläufig vor sich und ist daher Grundlage vieler alltäglicher Phänomene. So zerfurcht der Strahl eines Rasensprengers nicht die Beete, sondern fällt, durch unsichtbare Kräfte zerteilt, in einer respektablen Imitation natürlichen Regens in einzelnen Tropfen nieder. In einer kleineren Variante erzeugt ein Parfumerstäuber eine Duftwolke, die würde man sie in Vergrößerung betrachten, sich als aus Abertausenden mikroskopisch kleiner Tropfen zusammengesetzt herausstellt.

Jeder kann sich von der Entstehung eines Tropfens überzeugen, am einfachsten anhand eines tropfenden Wasserhahns. Aber wissen wir, was dabei geschieht?



Ein Tropfen ist in der Natur ein Wunderwerk der Natur. Er ist ein kleines Universum, das die Gesetze der Physik in sich vereint. Er fällt durch die Schwerkraft, wird durch die Oberflächenspannung zusammengehalten und zerfällt in Tropfen, wenn er auf eine Oberfläche trifft. Dieser Prozess ist ein Beispiel für die Komplexität der Natur, die wir oft als einfache Dinge betrachten.

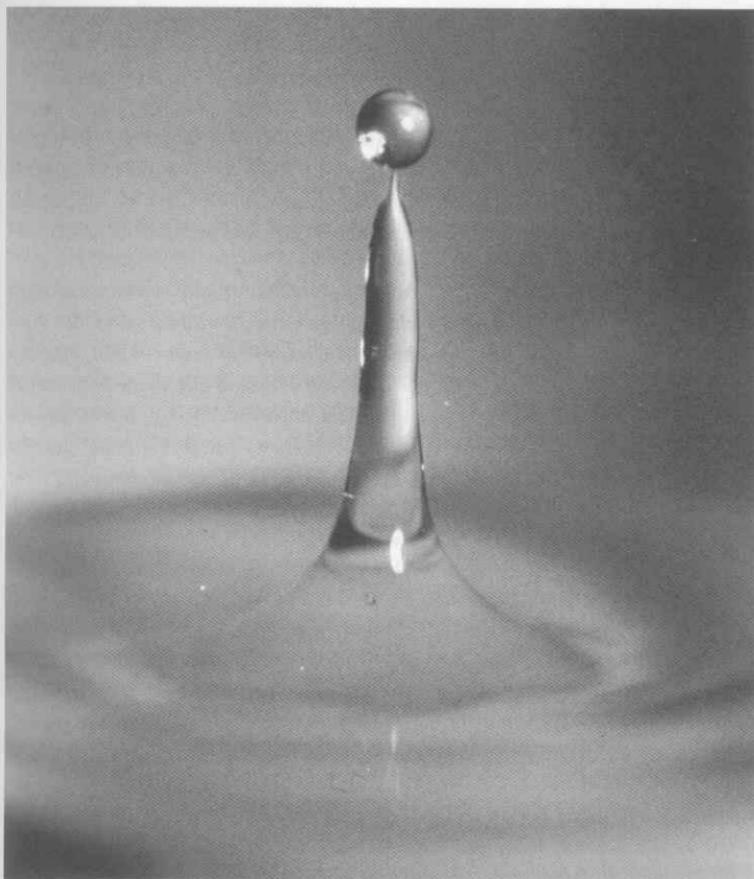
1  
Ein Delphin  
im Aquarium  
in Boston, 1977.  
Foto: Harold Edgerton.

Diese Frage stellte sich vor über 300 Jahren bereits der Pariser Abt Edme Mariotte, dessen Name durch das Boyle-Mariottesche Gesetz zum Druck von Gasen unsterblich geworden ist. Sein 1686 posthum erschienenenes Buch *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides* ist die erste wissenschaftliche Quelle, die die Entstehung von Tropfen diskutiert. Dazu läßt er einen Flüssigkeitsstrahl aus dem Boden eines Gefäßes austreten und findet, daß das Rinnsal nach einer gewissen Wegstrecke in eine Perlenschnur einzelner Tropfen zerfallen ist. In Mariottes Vorstellung ist es allein die Schwerkraft, die für diesen Zerfall verantwortlich ist, indem sie den Strahl zu einem immer dünneren Faden auszieht. Ist er so dünn geworden »wie ein Haar«, so ist der Faden zerrissen und ein Tropfen entstanden. Aus heutiger Sicht würde man statt von der Dicke eines Haars vielleicht von molekularen Dimensionen reden, die der Faden angenommen haben muß. Die Beschreibung der Flüssigkeit als ein Kontinuum verliert dann freilich ihren Sinn und wir müssen uns daran erinnern, daß die Materie aus einzelnen Teilchen zusammengesetzt ist, die durch anziehende Kräfte zusammengehalten werden. Aber gleichgültig, wie die mikroskopische Struktur aussieht, in der Vorstellung von Mariotte bedarf es eines weiteren Mechanismus, um einen Tropfen bilden zu können, der durch die makroskopische Bewegung der Flüssigkeit nicht beschrieben wird. Sonst würde der Faden sich ewig weiter verdünnen, vielleicht unvorstellbar kleine Dimensionen annehmen, aber doch ewig mit seinem Ausgangspunkt verbunden bleiben.

Wie anders wäre Mariottes Beschreibung ausgefallen, wenn ihm moderne fotografische Methoden zur Verfügung gestanden hätten! Mit bloßem Auge läßt sich nämlich das Ablösen eines Wassertropfens von einem Hahn kaum beobachten. Während der Tropfen eben noch hängt, ist im nächsten Moment schon ein isolierter Tropfen entstanden. Wie aber sieht die Form des Tropfens zur Zeit der Ablösung aus? Gibt es überhaupt einen wohldefinierten Zeitpunkt, den man als das »Geburtsdatum« des Tropfens festhalten könnte?

Auch hier hat Harold Edgerton, der Fotograf des Delphin-Bildes, den Weg gewiesen. Mit Hilfe der Kurzzeitfotografie machte er in den 30er Jahren zahlreiche, sich sehr schnell abspielende Vorgänge dem Auge zugänglich. Er konstruierte hierzu Blitzapparate, die das zu fotografierende Objekt für weniger als den millionsten Teil einer Sekunde beleuchten. Selbst die Bewegung einer Gewehrpatrone erscheint durch diese Aufnahmetechnik wie eingefroren. Wie sehr es Edgerton zudem verstand, die Illustration fundamentaler physikalischer Vorgänge mit einem Blick für das Schöne zu verbinden, macht Abb. 2 deutlich. Gezeigt wird ein Wasserspritzer, der aus einem Glas hervorschießt. Für diese Fotografie hat man einen Tropfen in das Glas fallen lassen, der nun von der Wasseroberfläche wie von einer elastischen Membran zurückgeworfen wird. Der Spritzer ist unmittelbar vor dem Moment festgehalten, in dem sich ein Tropfen ablöst. Er thront in gläserner Durchsichtigkeit auf einer Spitze, zu der sich die Wassersäule geformt hat. Das Bild wirft mit einem Schlag alle bisherigen Überlegungen über den Haufen: Mariottes Rinnsal steht hier auf dem Kopf, und der Tropfen löst sich *entgegen* der Schwerkraft ab. Es muß also noch eine andere Kraft geben, die für das Abschnüren verantwortlich ist und die die Schwerkraft an Wirksamkeit sogar übertrifft.

Diese Kraft ist die Oberflächenspannung, die 1805 zuerst von dem vielseitigen englischen Forscher Thomas Young beschrieben wurde. Sein Lebenswerk umfaßt bedeutende Beiträge zur Mechanik, Hydrodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Sinneswahrnehmung und Medizin. Nebenbei war Young auch noch Ägyptologe und



2  
Ein Tropfen fällt in ein Wasserglas und erzeugt einen Spritzer, der von der Wasseroberfläche zurückprallt. An seinem Ende trennt sich ein Tropfen ab, noch bevor der Wasserspritzer wieder zurückfallen kann. Foto: Harold Edgerton, 1978.

maßgeblich an der Entzifferung des Steins von Rosetta beteiligt. Die mathematische Beschreibung der Kapillarkräfte ist aber vielleicht sein berühmtester wissenschaftlicher Beitrag. Nur kurze Zeit später gelang dieselbe Entdeckung – wenn auch in etwas anderem mathematischen Gewande – dem französischen Astronomen, Physiker und Mathematiker Pierre Simon de Laplace, der sie eilig als Anhang zu seinem vielbändigen Werk über Himmelsmechanik veröffentlichte.

Ihren Ursprung hat die Oberflächenspannung in den molekularen Anziehungskräften, die der Flüssigkeit erst ihren Zusammenhalt geben. Um es in einem Bild zu verdeutlichen: Diese Kräfte drücken die Tendenz der Flüssigkeitsbausteine aus, sich am liebsten zu ihresgleichen zu gesellen und nur ungern den Kopf in die umgebende Atmosphäre zu recken. Die Oberflächenkräfte bieten genug Zusammenhalt, damit sich beispielsweise das Wasser über den Rand eines Glases hinaus wölben kann. Gleichzeitig sind sie für die Kugelgestalt eines isolierten Tropfens verantwortlich. In dieser »Embryonalstellung« bietet der Tropfen seiner Umgebung nämlich möglichst wenig Oberfläche dar, und die Wassermoleküle sind hauptsächlich von ihresgleichen umgeben.

Auf unseren Wasserspritzer trifft dasselbe zu: Ein verkleinerter Halsdurchmesser bedeutet eine geringere Oberfläche, daher wirken Kräfte, die den Durchmesser verkleinern. Geschähe dies auf der ganzen Länge des Halses, müßte man zuviel

Flüssigkeit bewegen. Das Abschnüren des Halses in unserem Bild, bei dem der Durchmesser schließlich Null erreicht, geschieht also nur in einem Punkt. Der plumpe Hals kann der Bewegung nicht folgen und so bleibt sie schließlich auf einen Punkt konzentriert. Bemerkenswert ist die Form, die dabei entstanden ist. Der Tropfen hat zur Zeit seiner Abtrennung annähernd Kugelform erreicht, also bereits seine bevorzugte Gestalt. Demgegenüber hat die Oberflächenspannung den Flüssigkeitshals zu einem Kegel geformt, auf dem der Tropfen aufgespießt scheint. Die »Tränenform« des Tropfens, die wir aus zahllosen Darstellungen beispielsweise der Kunst kennen, ist also ganz falsch.

Eine zentrale Frage ist nun, wie die Tropfenbildung von den mannigfachen Bedingungen abhängt, unter denen ein Tropfen entstehen kann: sei es, daß Wasser in einer Fontäne nach oben geschleudert wird, wie in unserem Bild, oder von einer Pipette herabtröpft. Je nach der Dicke der Fontäne oder dem Durchmesser der Pipette wird der Tropfen auf jeden Fall sehr unterschiedlich groß sein. Schließlich kann man statt Wasser auch eine zähe Flüssigkeit wie Honig betrachten, die langsam und Fäden ziehend herabtröpft. All diese Vorgänge scheinen also recht verschieden zu sein, etwa in Bezug auf die Tropfengröße. Gibt es aber dennoch etwas Gemeinsames, das allen Abschnürvorgängen eigen ist?

Unsere Überlegungen legen nahe, daß eine einfache, alles erfassende Beschreibung höchstens in unmittelbarer Nähe des Punktes möglich ist, in dem sich der Tropfen ablöst. Schnürt sich der Hals immer weiter ein, so erreicht er beliebig kleine Dimensionen und spürt von der ihn umgebenden Flüssigkeitsmasse nichts mehr. Die Bewegung des Flüssigkeitshalses ist also schließlich von seiner Umgebung weitgehend entkoppelt, unabhängig von ihr. Gelingt es, diese Bewegung zu beschreiben, so haben wir gleichzeitig eine zentrale Frage der Tropfenbildung gelöst: Wie kann es zur Geburt eines neuen Gebildes kommen, das unabhängig vom Rest der Flüssigkeit weiterexistiert? Fortan teilt sich nämlich nichts mehr von der Bewegung des Tropfens dem Rest der Flüssigkeit mit, auch der kausale Faden ist zerrissen.

Dies stellt ein fundamentales Problem für die mathematische Beschreibung der Bewegung dar, die auf einer *kontinuierlichen* Abfolge von Profilen beruht. Es muß einen Ausnahmepunkt geben, der nicht an die Bedingung der kontinuierlichen Entwicklung gebunden ist; man bezeichnet einen solchen Punkt als eine Singularität. Aufgrund dieser Schwierigkeit versucht man üblicherweise Singularitäten in der Physik zu vermeiden, sie werden im Gegenteil als ein Anzeichen dafür gesehen, daß mit der Theorie etwas »nicht stimmt«. Dieser Einwand trifft aber für die Tropfenbildung nicht zu, vielmehr müssen wir uns hier gerade mit dem plötzlichen Auftauchen eines neuen Gebildes auseinandersetzen. Dabei stellt sich die Zusatzfrage, wie die Bewegung nach der Singularität wieder aufgenommen werden kann. Kann die notwendige Information über die Ablösung hinweg gerettet werden?

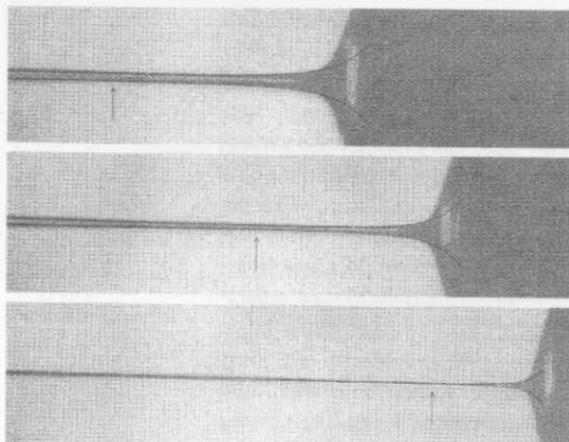
Zunächst gilt es aber zu beschreiben, wie der Hals immer dünner wird, um dann in endlicher Zeit mit seinem Durchmesser gegen Null zu gehen. Wir hatten bereits der Erwartung Ausdruck verliehen, daß dieses Einschnüren weitgehend isoliert von der Umgebung vor sich geht. Es gibt also keinen Grund, warum sich an irgendeinem Punkt die Natur der Bewegung ändern sollte. Gleichzeitig soll der Durchmesser des Halses immer kleiner werden. Das legt nahe, daß die *Form* des Halses immer gleich bleibt, seine Abmessungen aber eine fortgesetzte Verkleinerung erfahren, so als würde er mit einem Fotokopierer von einem Papierformat auf das nächstkleinere gebracht. Dieses entspräche dann einem etwas späteren Zeitpunkt,

der Punkt des Zerreißen wäre näher herangerückt. Dieses simple Verhalten, bei dem sich das Profil von einem Zeitpunkt zum anderen nur durch einen Skalenfaktor unterscheidet, wird als *selbstähnlich* bezeichnet. Wir konnten zeigen, daß sich der Skalenfaktor wie der zeitliche Abstand von der Singularität verhält: Verkleinert man den zeitlichen Abstand auf die Hälfte, so schrumpft der Durchmesser ebenfalls auf die Hälfte. Erreicht man schließlich den kritischen Punkt der Singularität, so ist der Halsradius auf Null geschrumpft. Gleichzeitig geht bei der fortgesetzten Verkleinerung jede Information über die ursprüngliche Dicke und Form des Halses verloren. Diese bestimmen sich allein aus einem lokalen Gleichgewicht der Kräfte: Die Oberflächenspannung versucht die Halsdicke zu verkleinern, dabei muß sie dessen Trägheit und die Zähigkeit der Flüssigkeit überwinden. Die Form des Halses ist schließlich *universell*, das heißt unabhängig von seiner Ausgangsform. Man sieht, daß die beiden Phänomene der Selbstähnlichkeit und der Universalität eng verwandt sind, und tatsächlich treten sie in der Natur häufig zusammen auf.

So weit, so einfach? Aber treffen diese Überlegungen zu? Kann man den Punkt des Zerreißen noch besser beobachten, als es bei der raschen Bewegung der Wasserfontäne aus Abb. 2 der Fall war? Es gibt einen überraschend einfachen Trick, um derartige Beobachtungen zu ermöglichen. Man muß dasselbe Experiment lediglich mit einer anderen, zäheren Flüssigkeit wiederholen. Jeder weiß vom Frühstückstisch, daß Honig sehr viel langsamer fließt als Wasser. Auch das Durchreißen eines Flüssigkeitshalses sollte mit Honig also sehr viel langsamer vor sich gehen. Tatsächlich zeigten dies unsere theoretischen Rechnungen, und nicht nur das: Es gibt gar keinen Unterschied zwischen dem Zerreißen von Wasser und Honig, die Formen sehen immer gleich aus. Nur ist es beim Honig so, als würde man alles in Zeitlupe betrachten und bei sehr viel größeren Halsdicken, also wie unter einem Vergrößerungsglas.

Die Bestätigung dieser Vorhersagen gelang vor einigen Jahren dem Physiker Tomasz Kowalewski, der zu diesem Zeitpunkt am Max-Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen wirkte. Heute setzt er seine Experimente in seiner Heimatstadt Warschau fort. Zu seinen Messungen benutzte Kowalewski Glycerin, eine klebrige Flüssigkeit, die ihren griechischen Namen von ihrem süßlichen Geschmack hat. Kowalewskis Aufnahmen, die in Abb. 3 zu sehen sind, zeigen einen stark vergrößerten Ausschnitt von lediglich 1 mm Breite. Das Gezeigte erinnert wieder an Honig, insofern man in jedem der drei Bilder einen dünnen Faden sieht, der an seinem Ende mit einem Tropfen verbunden ist, von dem man allerdings aufgrund des Bildausschnitts nur einen kleinen Teil sehen kann. Ansonsten entspricht der Tropfen aber dem, was man auch in Abb. 2 sehen kann.

Die Bildfolge 3 führt immer weiter an den Punkt des Zerreißen heran, und entsprechend wird der Faden nach unten hin immer dünner. Von oben nach unten kann man verfolgen, wie lange es noch bis zum Durchreißen dauert: 350 Millionstel Sekunden im ersten, 200 Millionstel Sekunden im zweiten, und 50 Millionstel Sekunden im dritten Bild. Gleichzeitig rückt der Pfeil, der die dünnste Stelle markiert, immer näher nach rechts an den Tropfen heran. Die theoretischen Vorhersagen für das Halsprofil sind im Bild als Linien eingezeichnet. Das zweite und dritte Profil geht aus dem ersten lediglich durch eine Verkleinerung hervor. Die gute Übereinstimmung der eingezeichneten Linien mit der Form des Halses bestätigt also unsere Überlegungen. In die Berechnung der theoretischen Vorhersage – der eingezeichneten Linien – ging die Art der Flüssigkeit nicht ein. Ist die



3  
*Das Abschnüren  
 eines Glycerin-  
 tropfens. Der zeitliche  
 Abstand vom Punkt  
 des Zerreißen  
 beträgt 350, 200,  
 und 50 Millionstel  
 Sekunden. Dabei  
 wird der Hals immer  
 dünner. Foto: Tomasz  
 Kowalewski*

Universalität, der Tatsache, daß das Einschnüren immer genau gleich aussieht. Weisen wir nach, daß die Bewegung nach dem Zerreißen ebenso universell sein muß, so ist unser Problem gelöst. Tatsächlich gelingt das unter Ausnutzung der Tatsache, daß der größte Teil der Flüssigkeit der ungeheuer schnellen Einschnürbewegung kaum folgen kann. Unmittelbar nach dem Durchreißen muß sich das Profil wieder an dieselbe Form anfügen, die es vorher hatte. Man kann zeigen, daß allein diese Information ausreicht, um das Verhalten vollständig vorherzusagen. Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, daß in ihm die mikroskopische Struktur der Materie nicht berücksichtigt zu werden braucht. Zwar muß beim schlußendlichen Zerreißen des Halses, der vielleicht nur noch durch einige wenige Moleküllagen gebildet wird, die »Körnigkeit« der Materie ins Spiel kommen, für das weitere Schicksal des isolierten Tropfens spielt das aber keine Rolle. Die uns allen vertraute anschauliche Vorstellung der Materie als einem Kontinuum ist sich also auch hier selbst genug.

Flüssigkeit erst einmal in den Sog des selbstähnlichen Verhaltens gelangt, gibt es keine Unterscheidung mehr: Alle Flüssigkeiten, gleich unter welchen Bedingungen, zerreißen auf die gleiche Weise. Ein einfaches Gesetz beherrscht jede Tropfenbildung, sei es beim Tropfen eines Wasserhahns, der Wasserfontäne, oder in einem der vielen Zerreißvorgänge auf dem Delphin-Bild.

Wir haben damit geklärt, auf welchem Weg die Flüssigkeitsbewegung in die Singularität hineinläuft, wie kommt sie aber wieder heraus? Der Schlüssel zur Antwort liegt in der weiter oben besprochenen