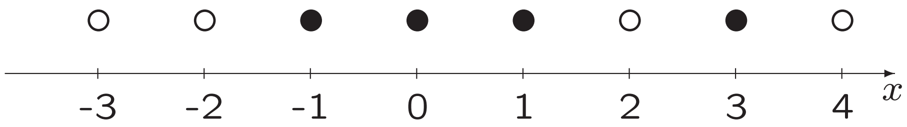
Áram fluktuációk nagyságrendje az egyszerű kizárásos folyamatban

Balázs Márton
(University of Wisconsin - Madison)
(BME Matematika Intézet)

Timo Seppäläinennel
közös munka
(University of Wisconsin - Madison)

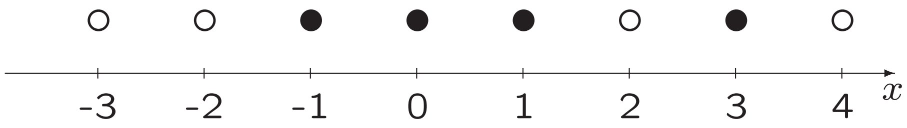
Budapest, 2006 november 16.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



Bernoulli(ϱ) eloszlás

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



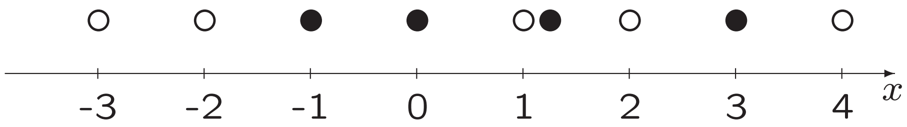
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



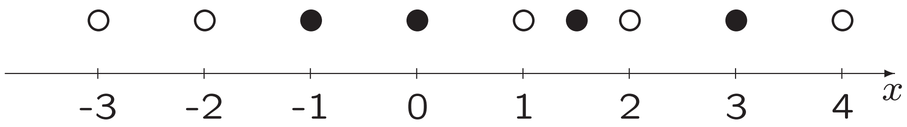
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



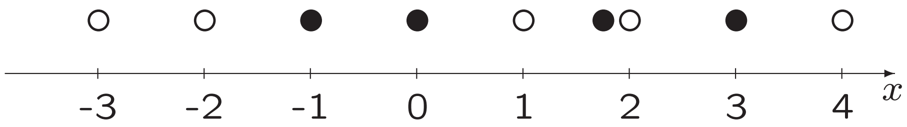
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



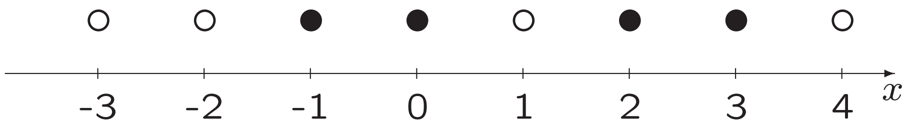
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



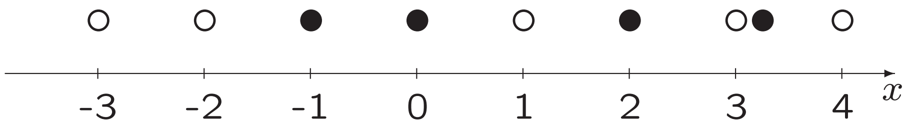
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



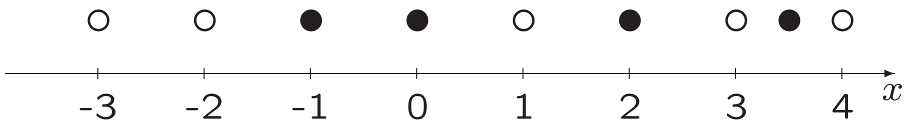
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



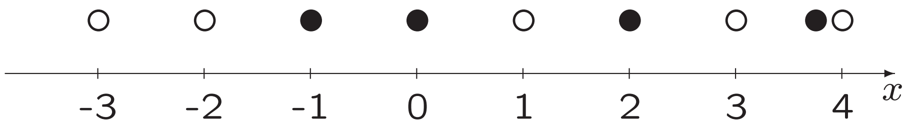
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



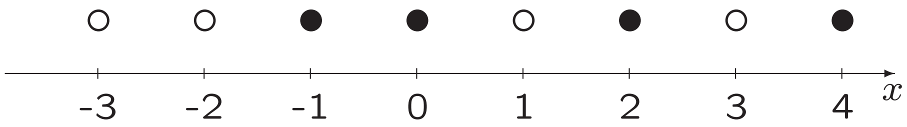
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



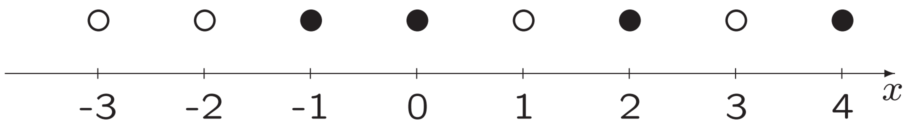
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



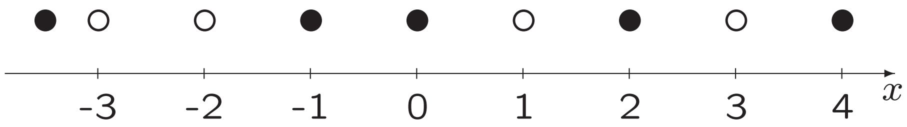
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



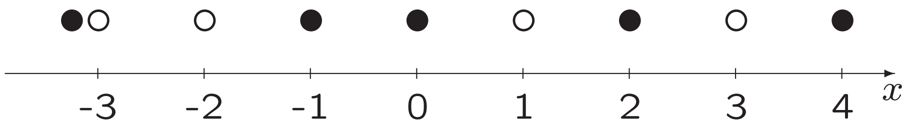
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



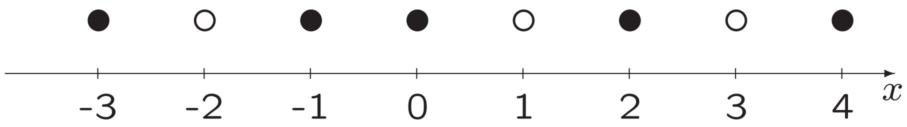
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



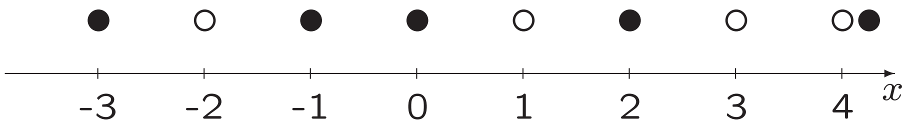
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



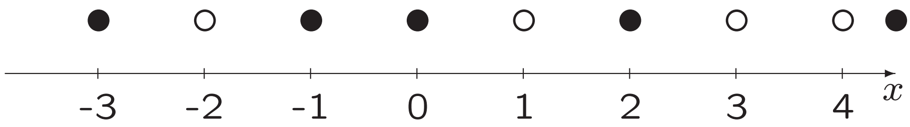
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



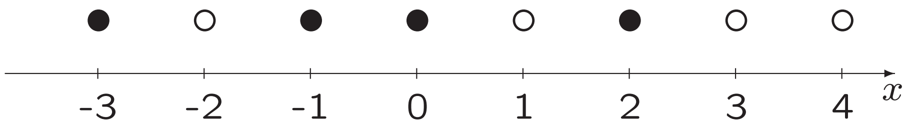
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



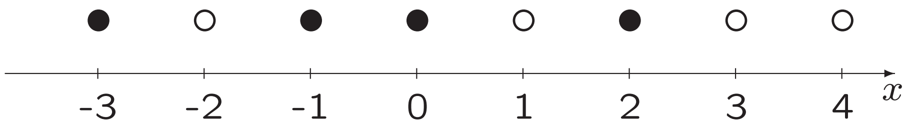
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



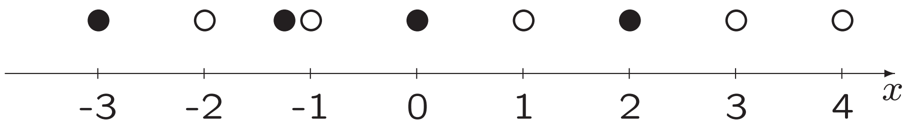
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



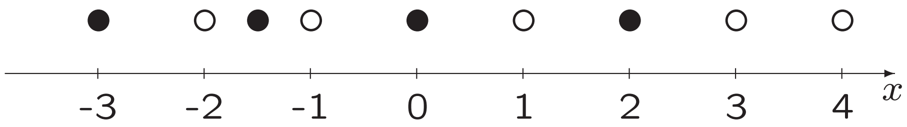
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



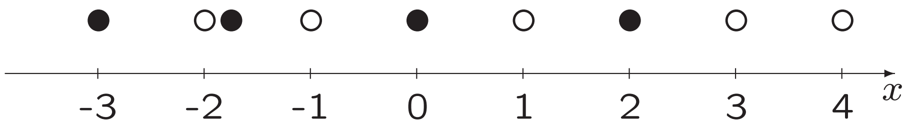
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



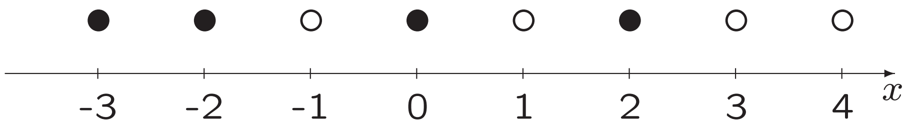
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



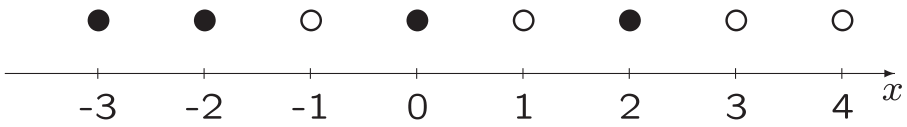
Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.

1. ASEP: Kölcsönható részecskék



Bernoulli(ϱ) eloszlás

részecskék ugranának

jobbra p rátával,
balra $q = 1 - p < p$ rátával.

Az ugrás csak akkor megy végbe, ha az érkezési hely üres.
A Bernoulli(ϱ) eloszlás stacionárius tetszőleges ($0 \le \varrho \le 1$) paraméterre. Bármely eltolás-invariáns stacionárius eloszlás Bernoulli-k keveréke.

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen.

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen. Ekkor $a := p - q$-val

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\partial}{\partial X}a[\varrho(1-\varrho)] = 0 \qquad \text{(Burgers)}$$

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen. Ekkor $a := p - q$-val

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\partial}{\partial X}a[\varrho(1-\varrho)] = 0 \qquad \text{(Burgers)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + a[1-2\varrho]\cdot\frac{\partial}{\partial X}\varrho = 0 \qquad \text{(amíg sima)}$$

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen. Ekkor $a := p - q$-val

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\partial}{\partial X} a[\varrho(1-\varrho)] = 0 \qquad \text{(Burgers)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + a[1-2\varrho]\cdot\frac{\partial}{\partial X}\varrho = 0 \qquad \text{(amíg sima)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\varrho(T, X(T)) = 0$$

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen. Ekkor $a := p - q$-val

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\partial}{\partial X} a[\varrho(1-\varrho)] = 0 \qquad \text{(Burgers)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + a[1-2\varrho] \cdot \frac{\partial}{\partial X}\varrho = 0 \qquad \text{(amíg sima)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\mathrm{d}X(T)}{\mathrm{d}T} \cdot \frac{\partial}{\partial X}\varrho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\varrho(T, X(T)) = 0$$

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen. Ekkor $a := p - q$-val

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\partial}{\partial X} a[\varrho(1-\varrho)] = 0 \qquad \text{(Burgers)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + a[1-2\varrho] \cdot \frac{\partial}{\partial X}\varrho = 0 \qquad \text{(amíg sima)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\mathrm{d}X(T)}{\mathrm{d}T} \cdot \frac{\partial}{\partial X}\varrho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\varrho(T, X(T)) = 0$$

Hidrodinamika (röviden)

Legyenek T és X nagy léptékű idő- és tér koordináták.

$\rightsquigarrow$ Legyen $\varrho = \varrho(T = 0, X)$ a sűrűség az $x = X/\varepsilon$ helyen. (Nagy léptékű függés.)

$\rightsquigarrow$ $\varrho(T, X)$ a sűrűség hosszú $t = T/\varepsilon$ idő után és az $x = X/\varepsilon$ helyen. Ekkor $a := p - q$-val

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\partial}{\partial X} a[\varrho(1-\varrho)] = 0 \qquad \text{(Burgers)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + a[1-2\varrho] \cdot \frac{\partial}{\partial X}\varrho = 0 \qquad \text{(amíg sima)}$$

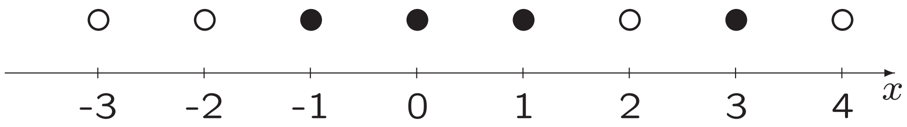
$$\frac{\partial}{\partial T}\varrho + \frac{\mathrm{d}X(T)}{\mathrm{d}T} \cdot \frac{\partial}{\partial X}\varrho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\varrho(T, X(T)) = 0$$

$\rightsquigarrow$ A karakterisztikus sebesség

$$C(\varrho) := a[1-2\varrho].$$

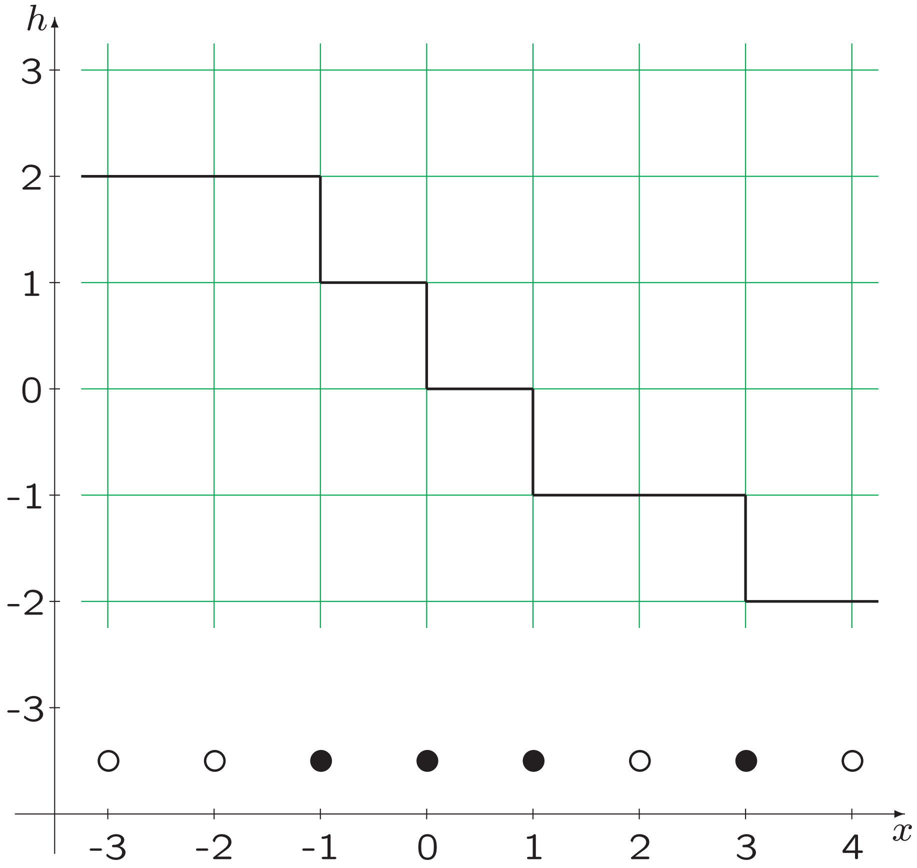
(ϱ konstans $\dot{X}(T) = C(\varrho)$ mentén.)

2. ASEP: Felületnövekedés



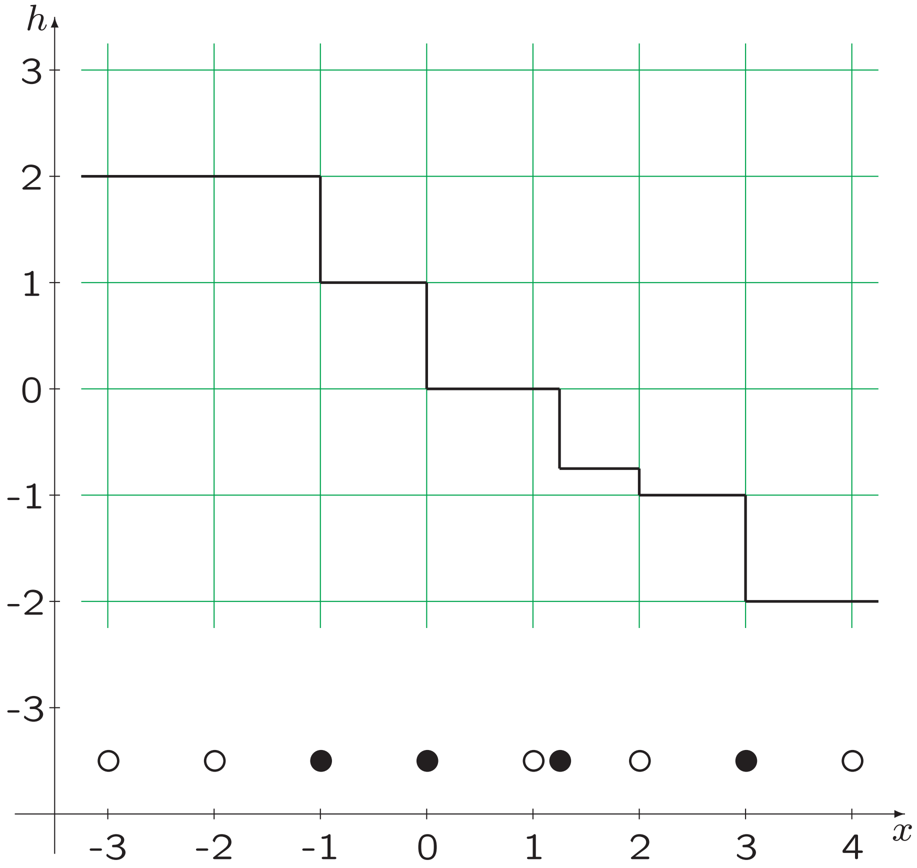
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



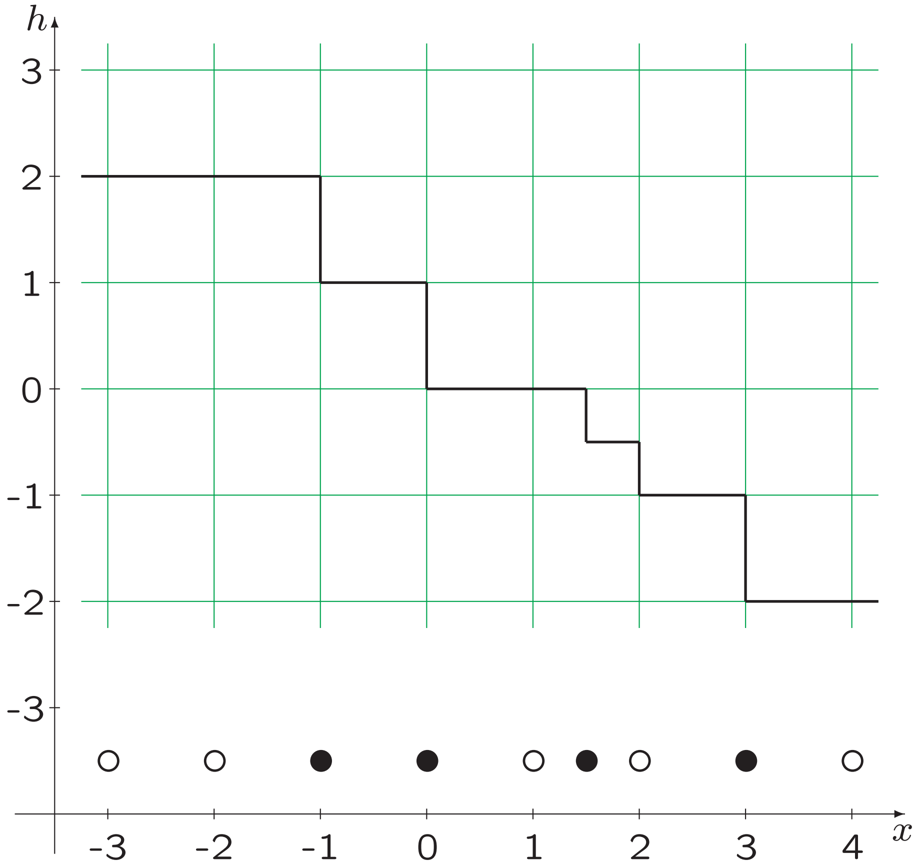
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



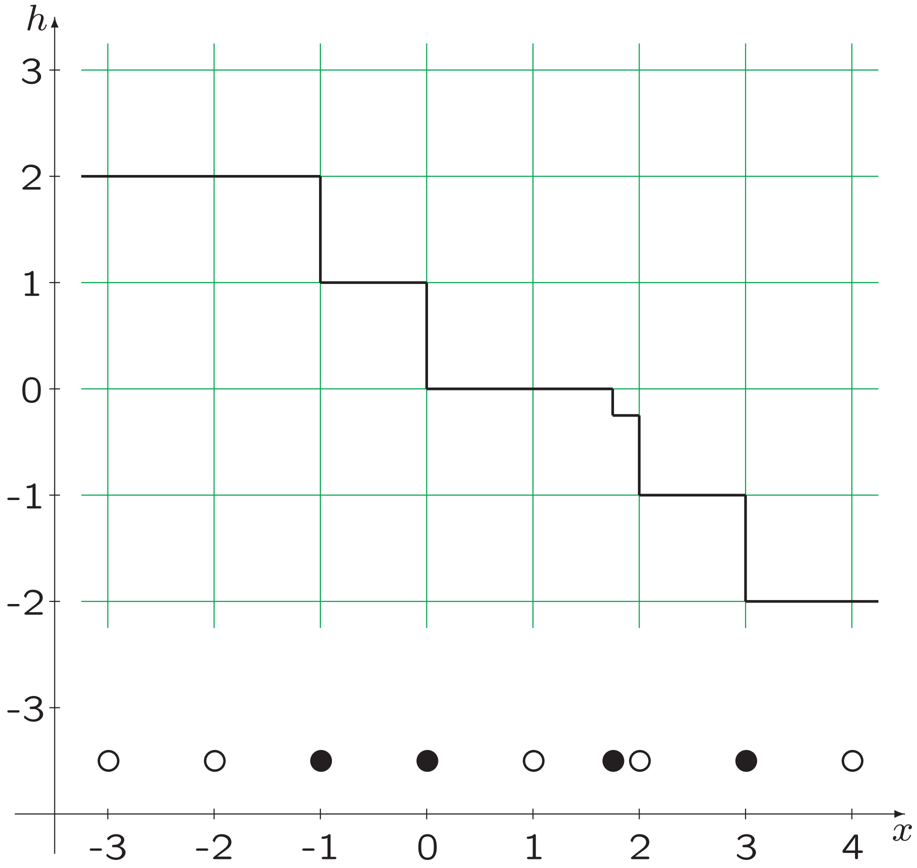
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



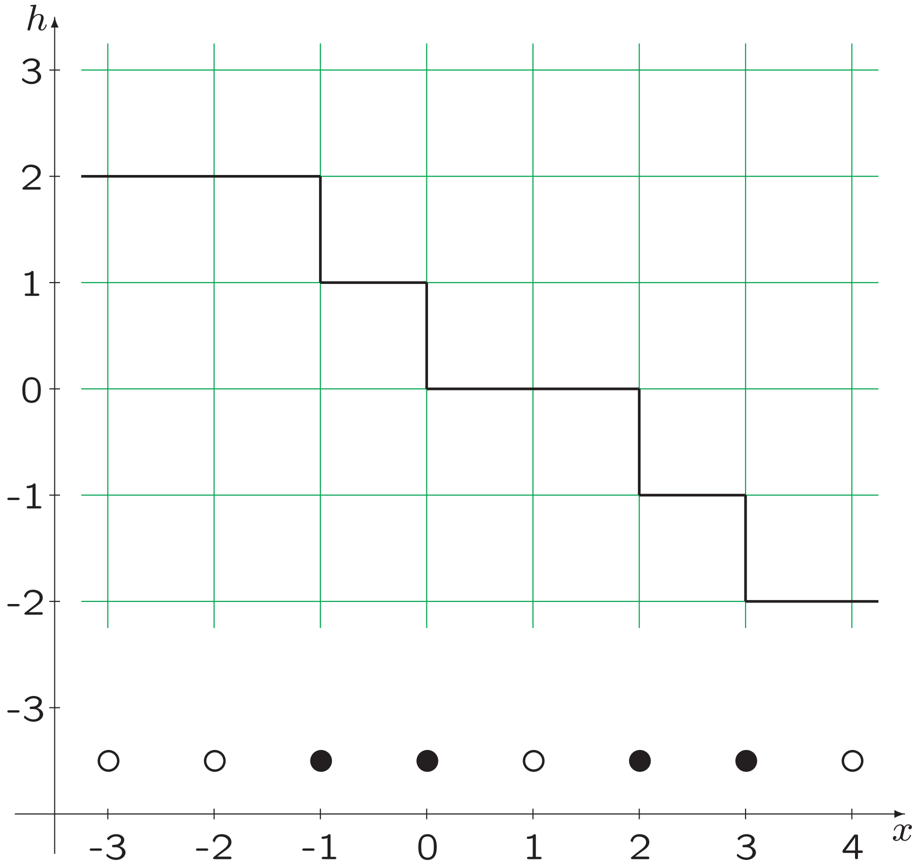
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



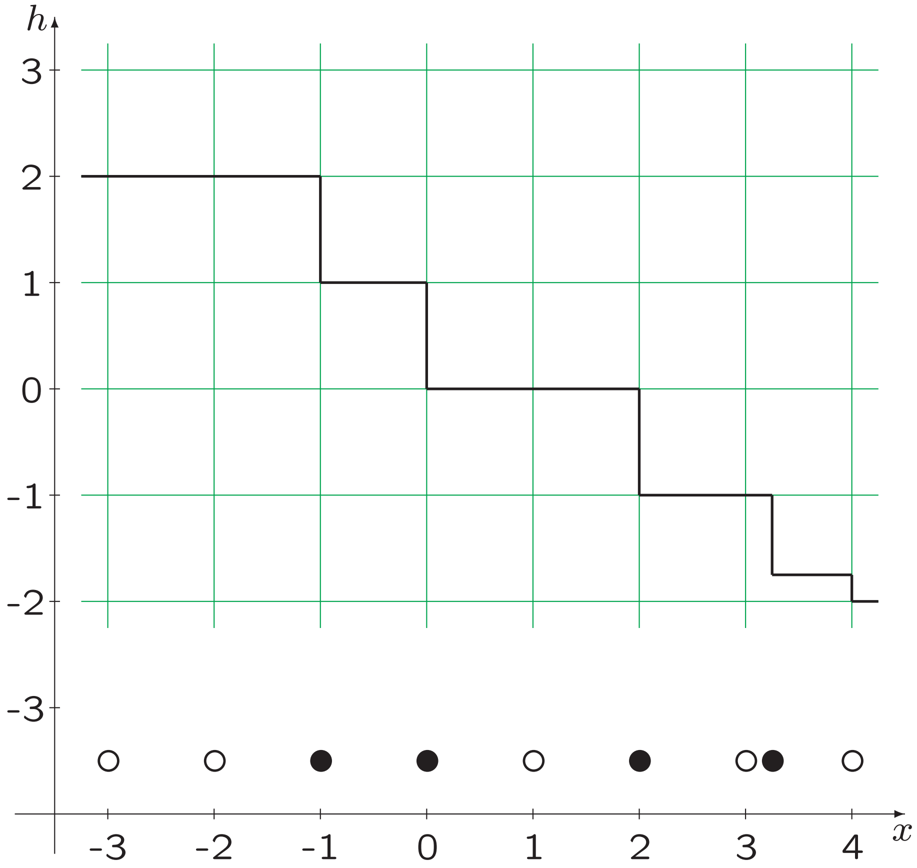
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



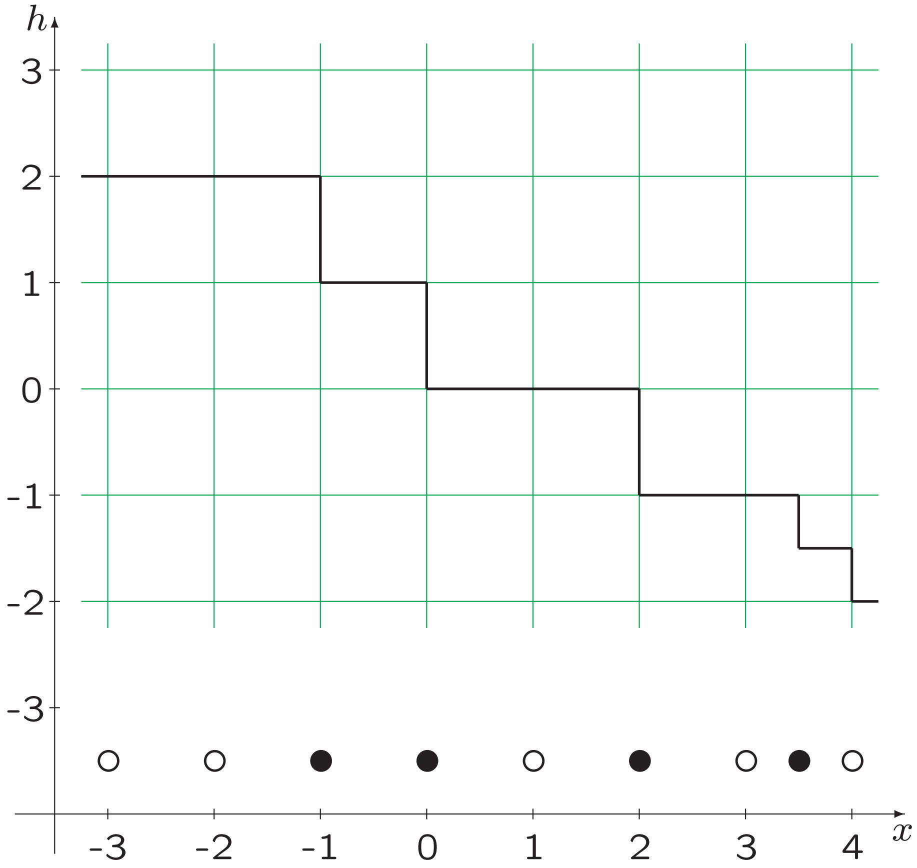
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



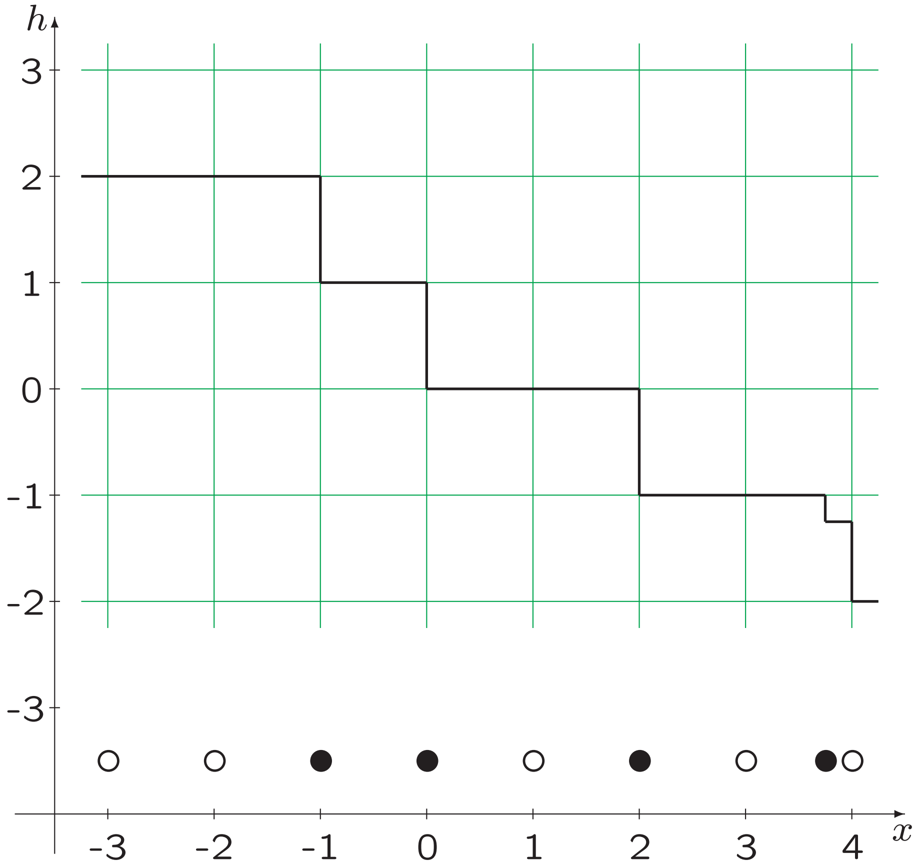
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



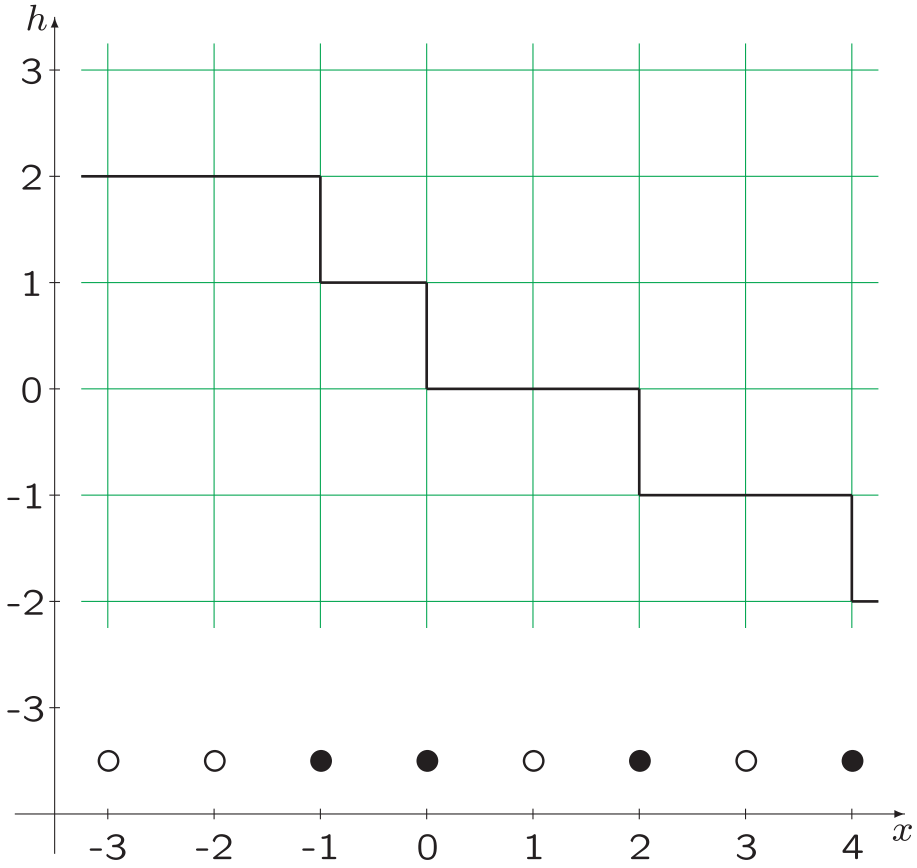
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



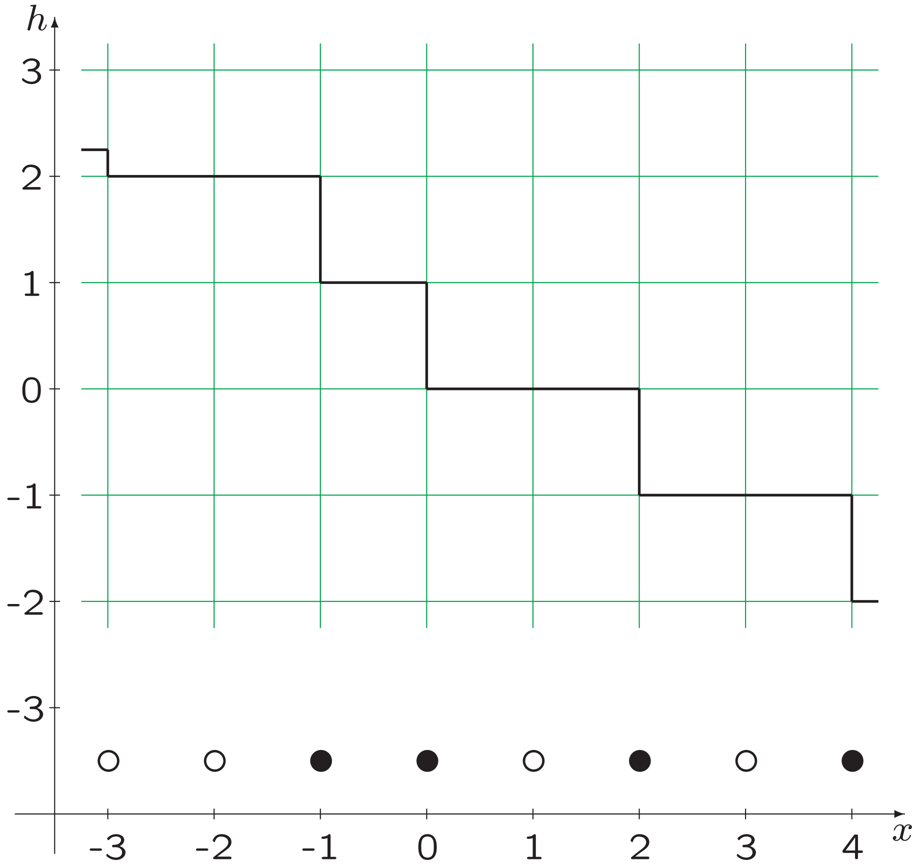
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



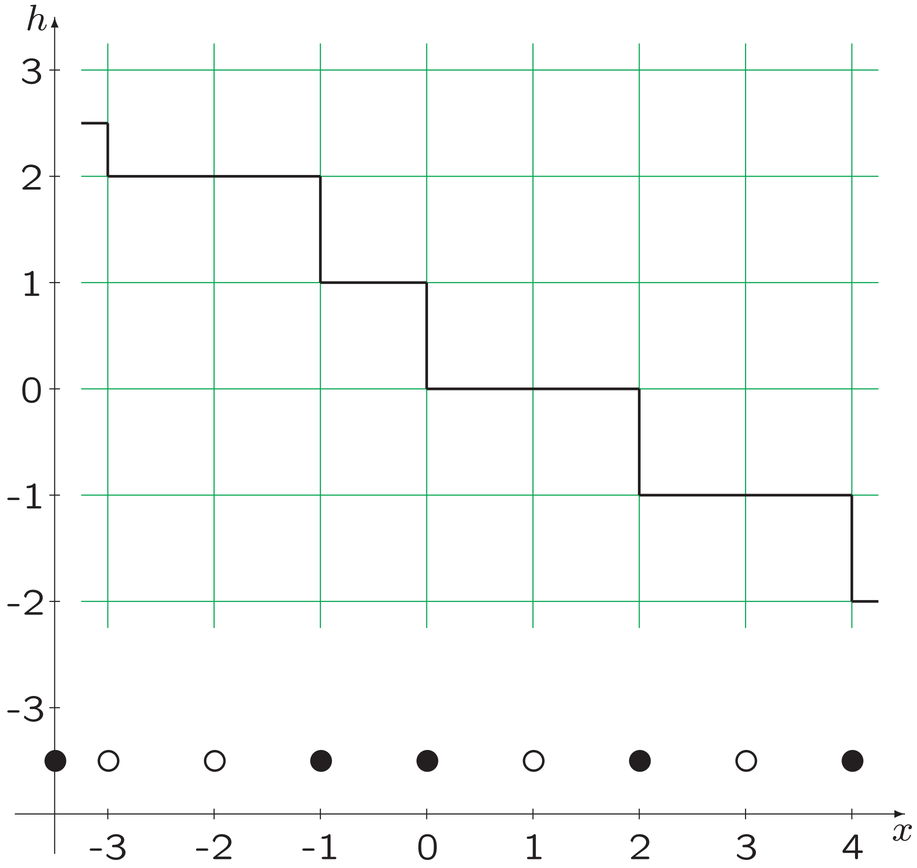
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



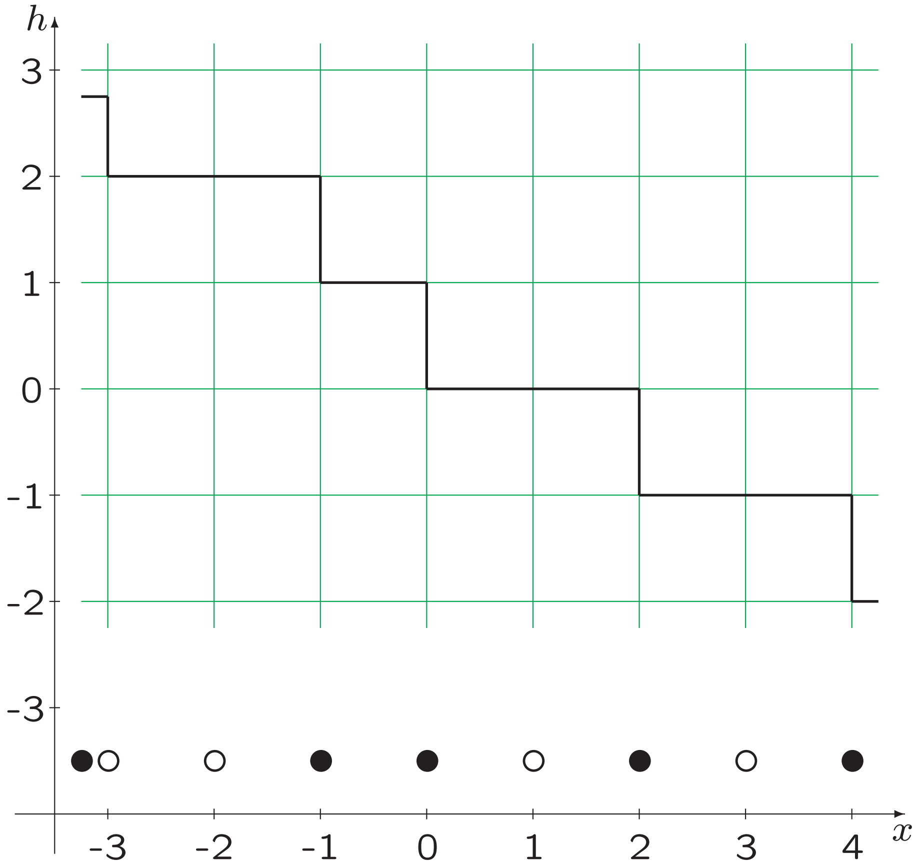
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



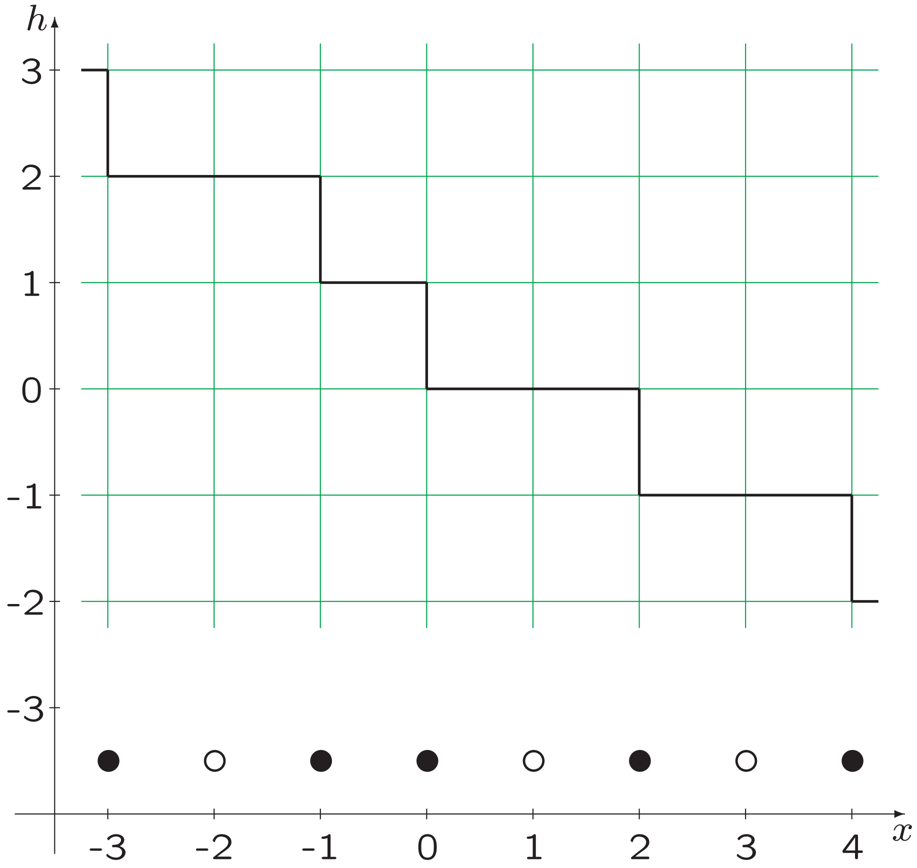
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



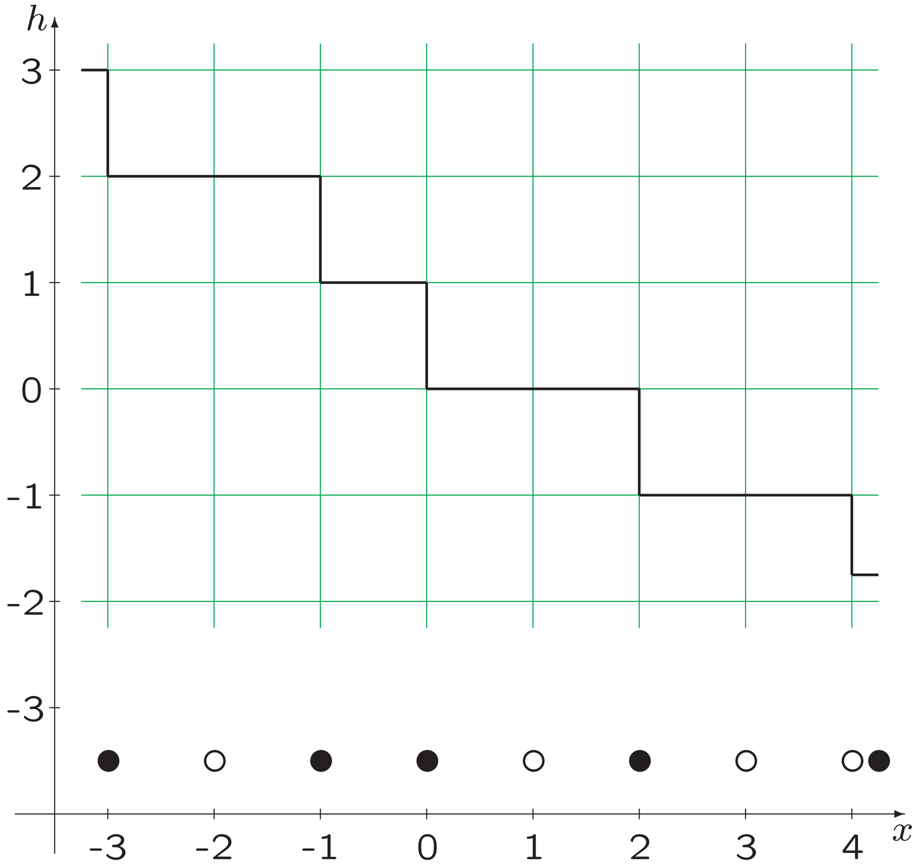
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



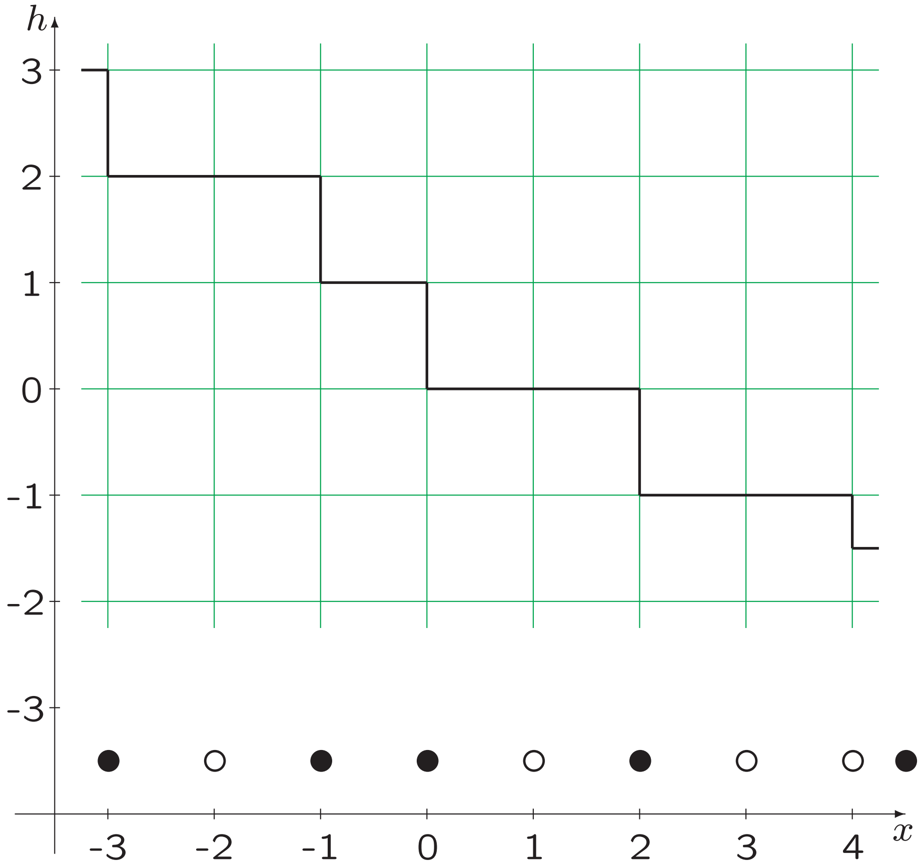
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



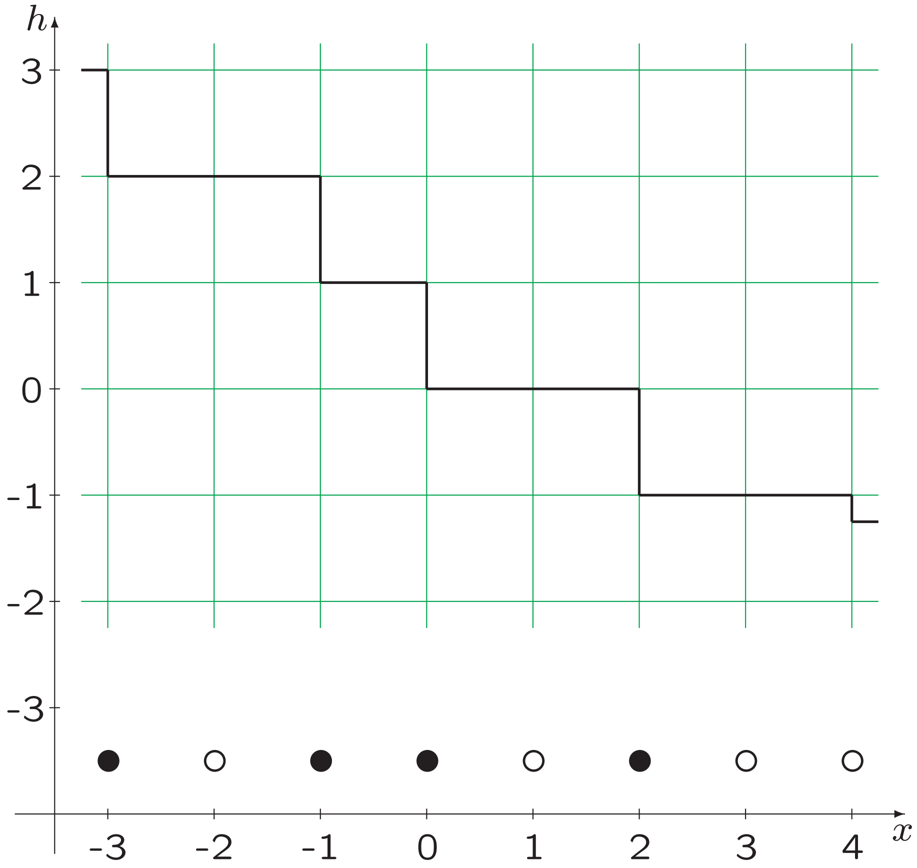
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



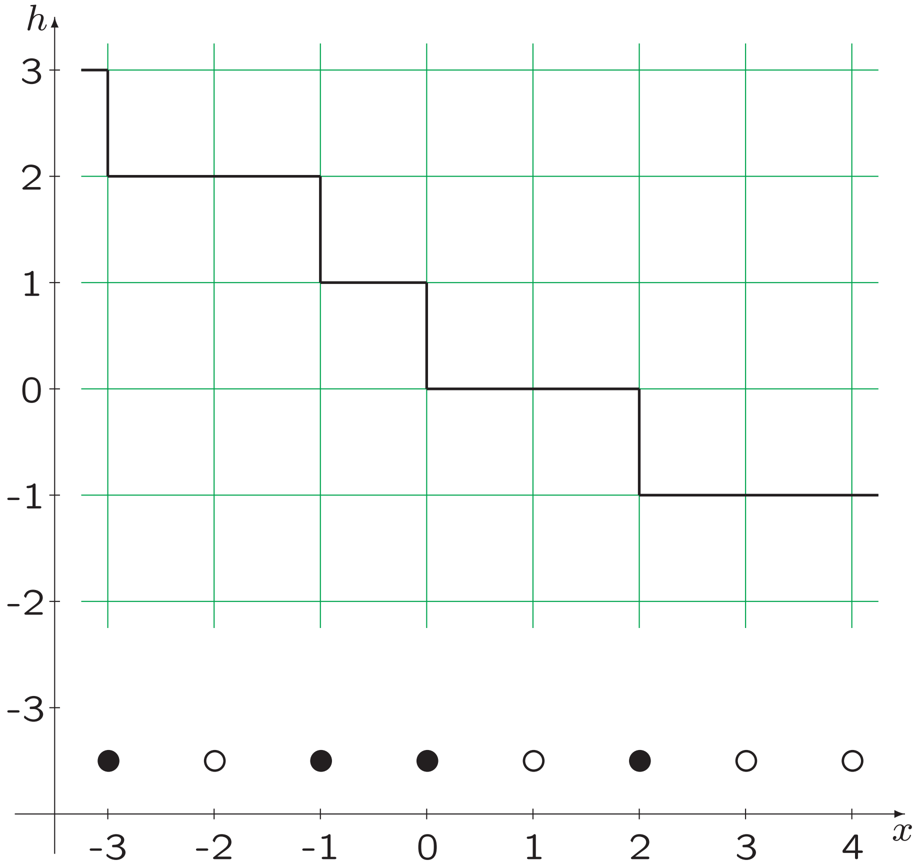
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



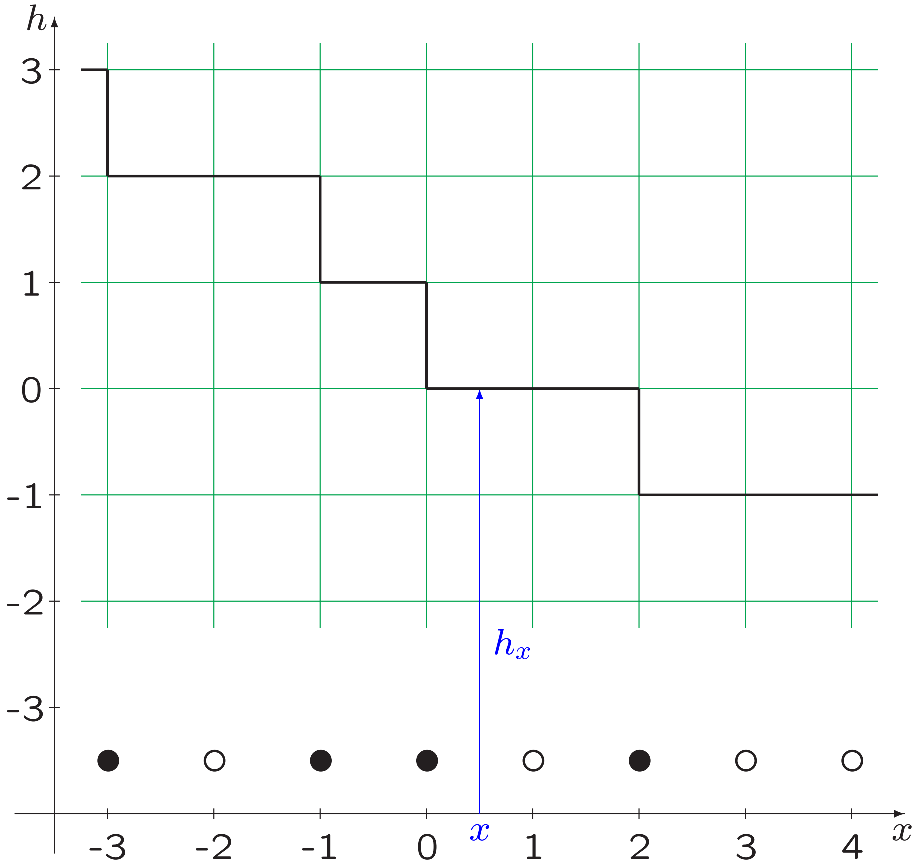
Bernoulli(ϱ) eloszlás

2. ASEP: Felületnövekedés



Bernoulli(ϱ) eloszlás

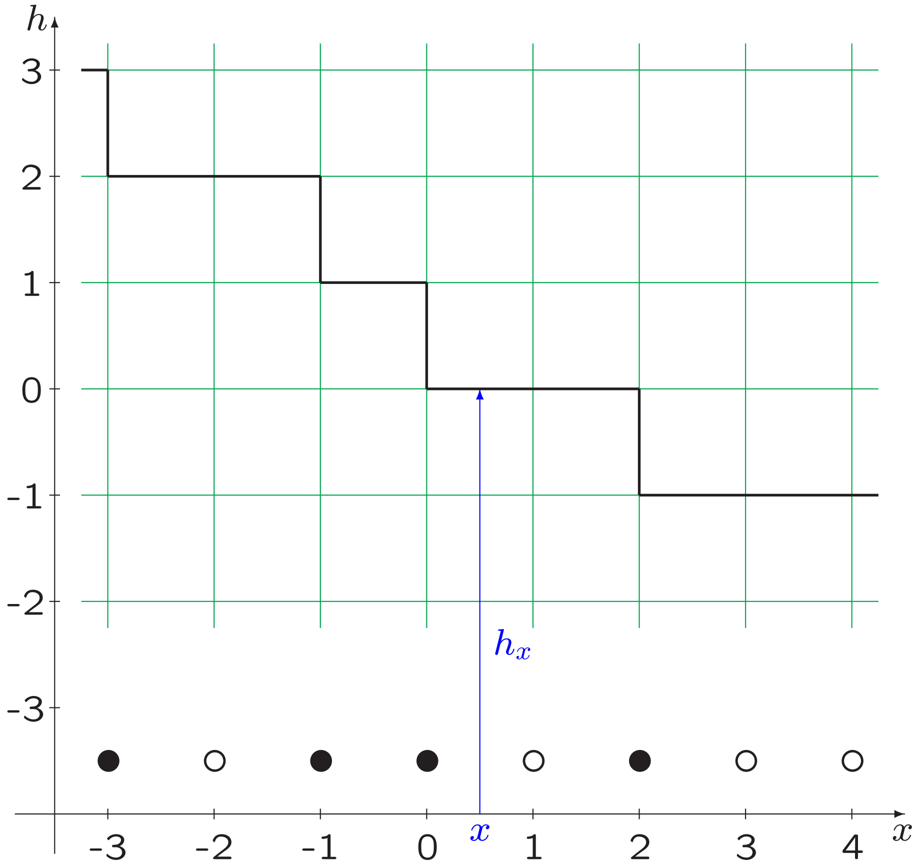
2. ASEP: Felületnövekedés



Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.

2. ASEP: Felületnövekedés

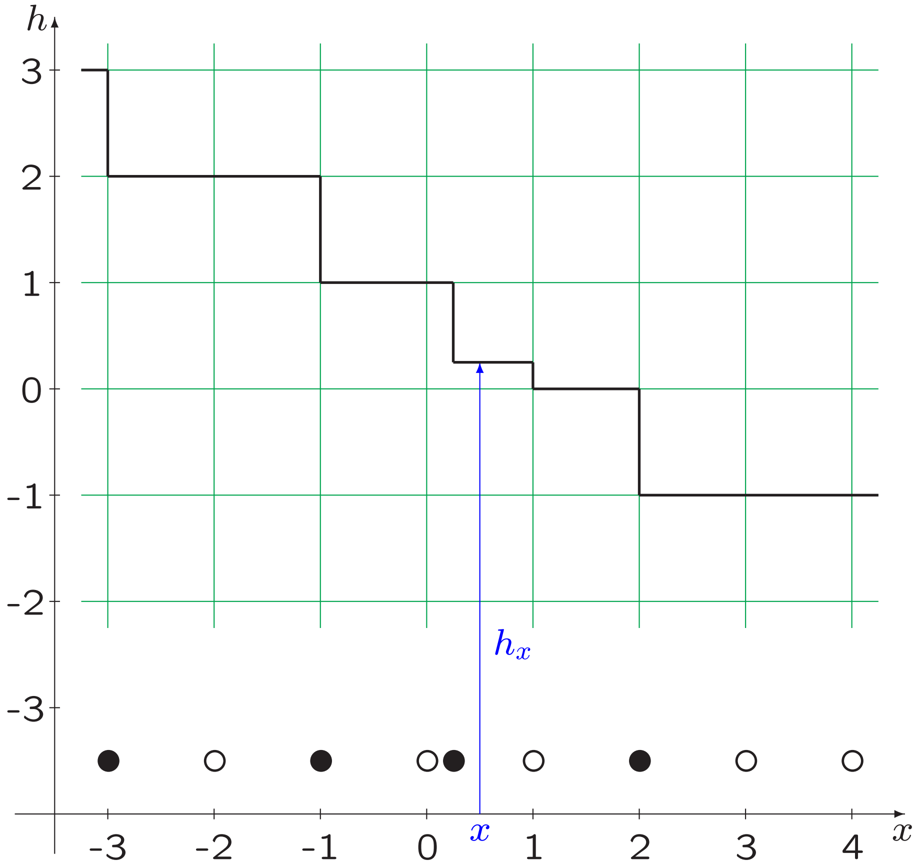


Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.

$h_x(t) - h_x(0)$ = az x fölött átugró részecskék előjeles számának összege.

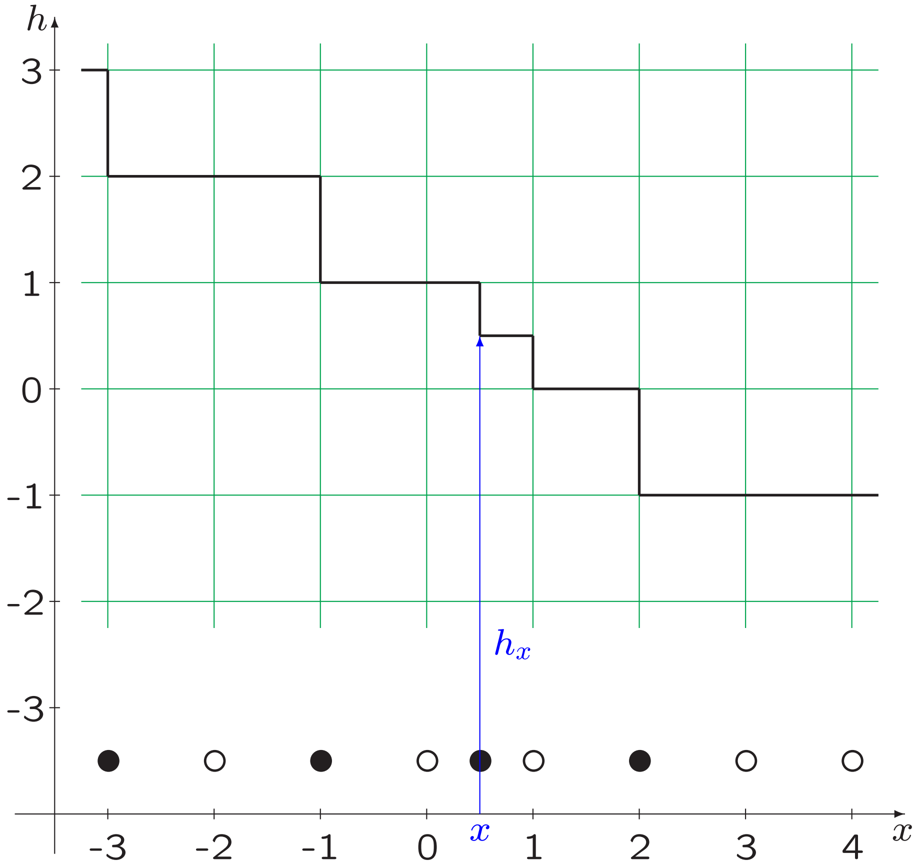
2. ASEP: Felületnövekedés



Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.
$h_x(t) - h_x(0)$ = az x fölött átugró részecskék előjeles számának összege.

2. ASEP: Felületnövekedés

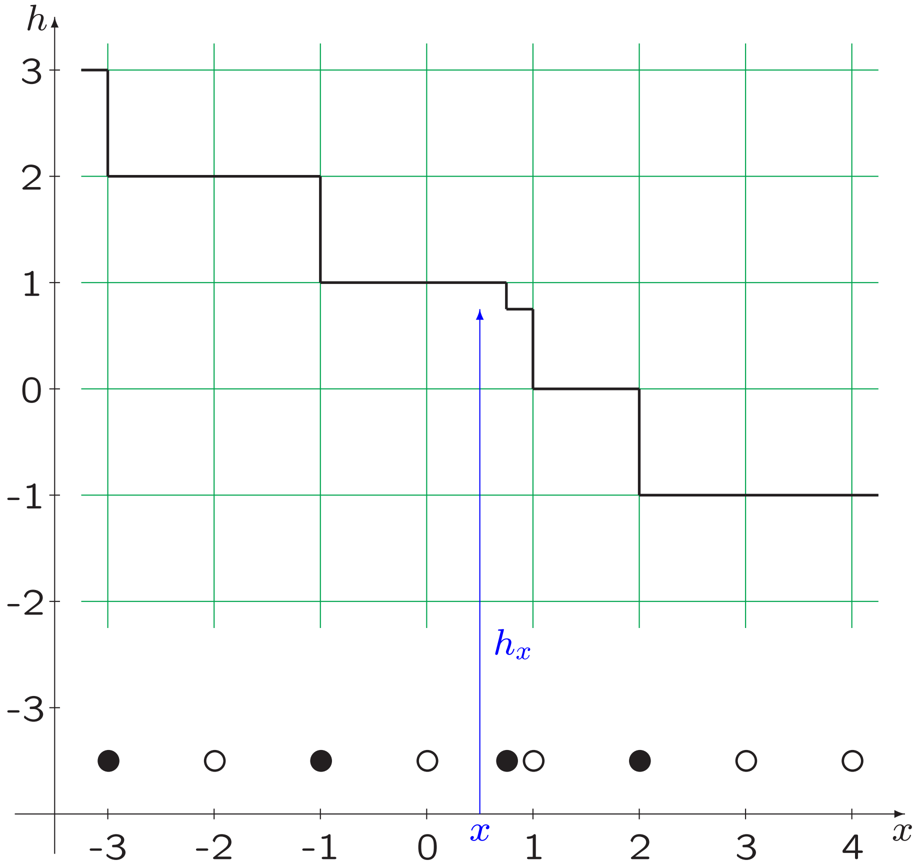


Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.

$h_x(t) - h_x(0)$ = az x fölött átugró részecskék előjeles számának összege.

2. ASEP: Felületnövekedés

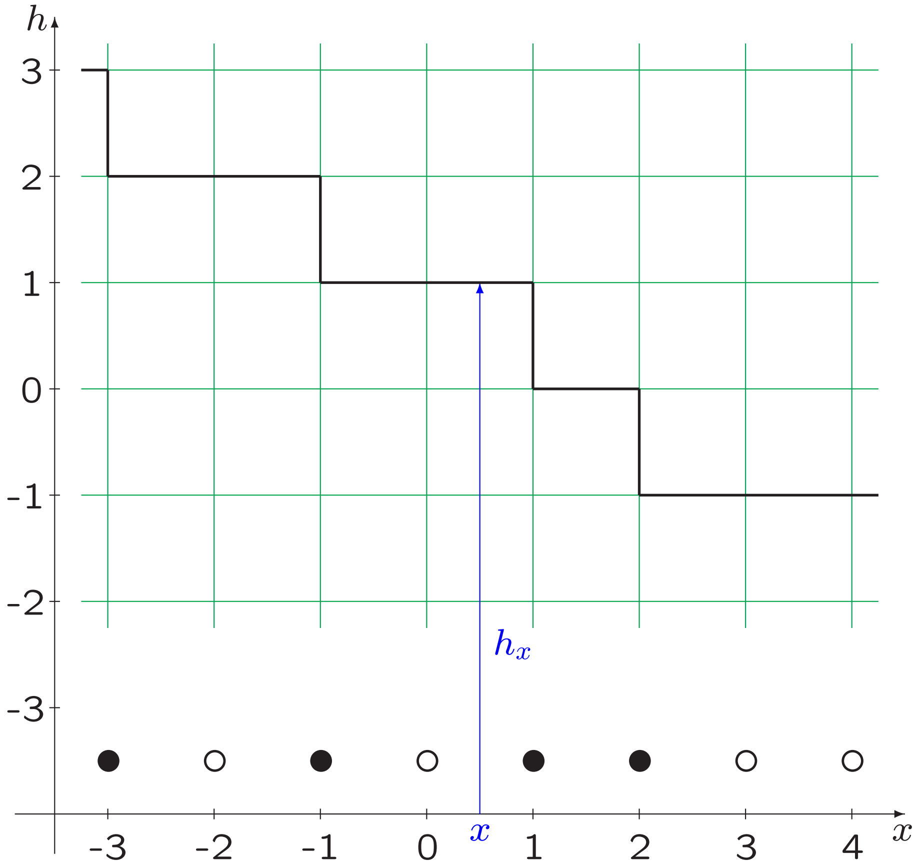


Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.

$h_x(t) - h_x(0)$ = az x fölött átugró részecskék előjeles számának összege.

2. ASEP: Felületnövekedés

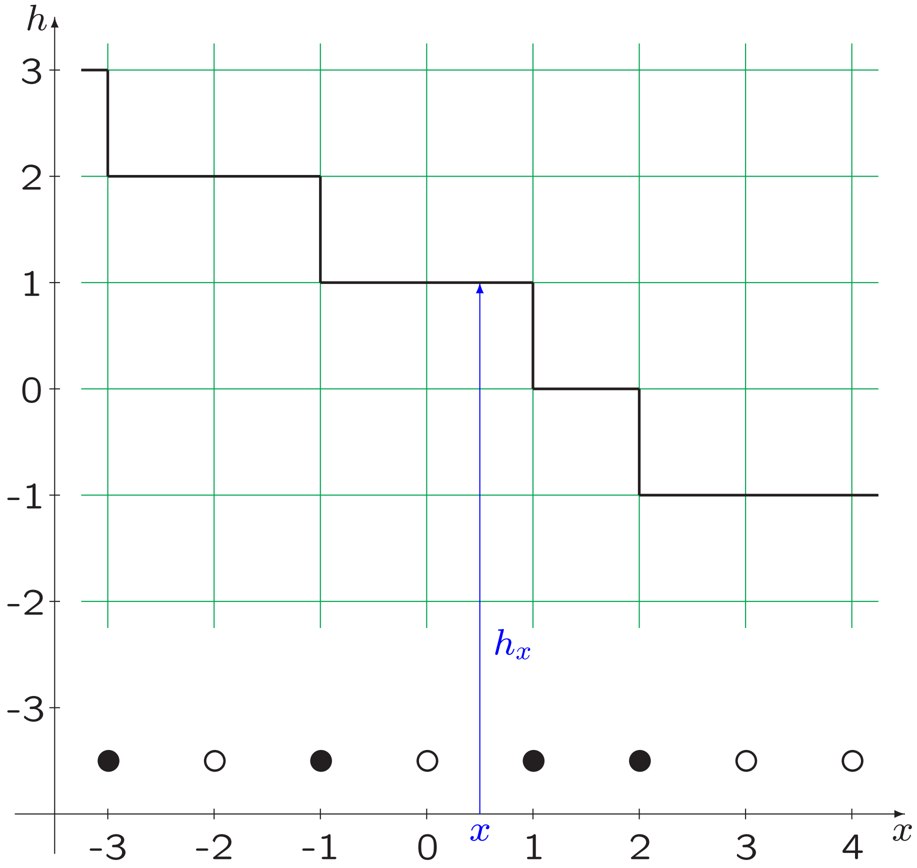


Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.

$h_x(t) - h_x(0)$ = az x fölött átugró részecskék előjeles számának összege.

2. ASEP: Felületnövekedés



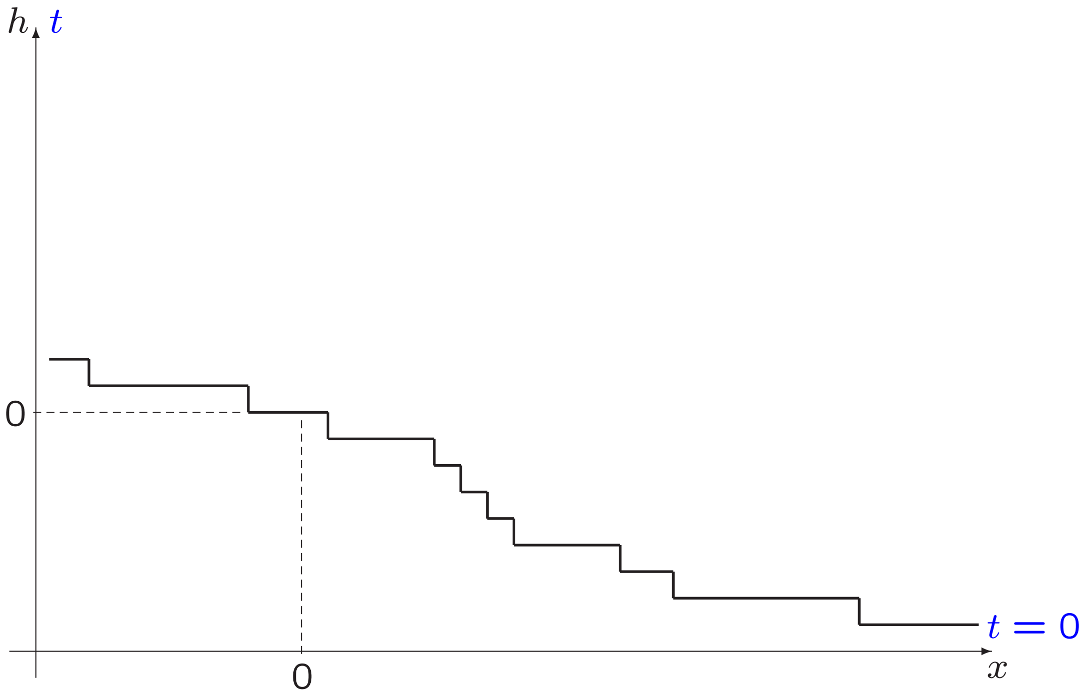
Bernoulli(ϱ) eloszlás

$h_x(t)$ = a fal magassága x fölött.

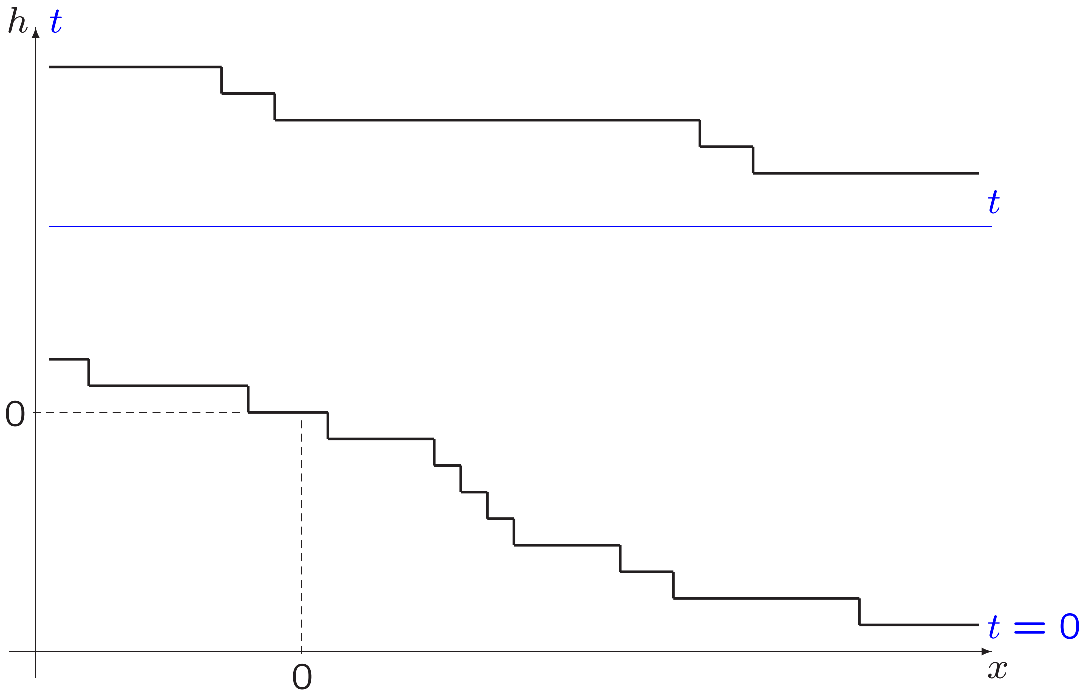
$h_x(t) - h_x(0)$ = az x fölött átugró részecskék előjeles számának összege.

$h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró részecskék előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

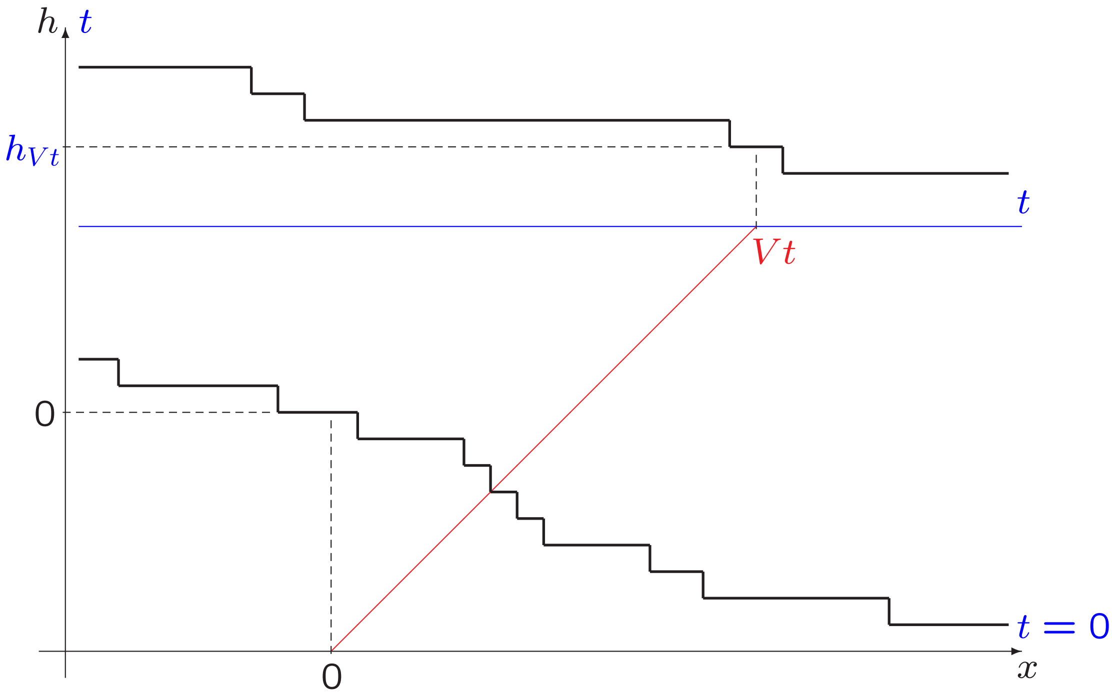
3. A növekedés fluktuációi



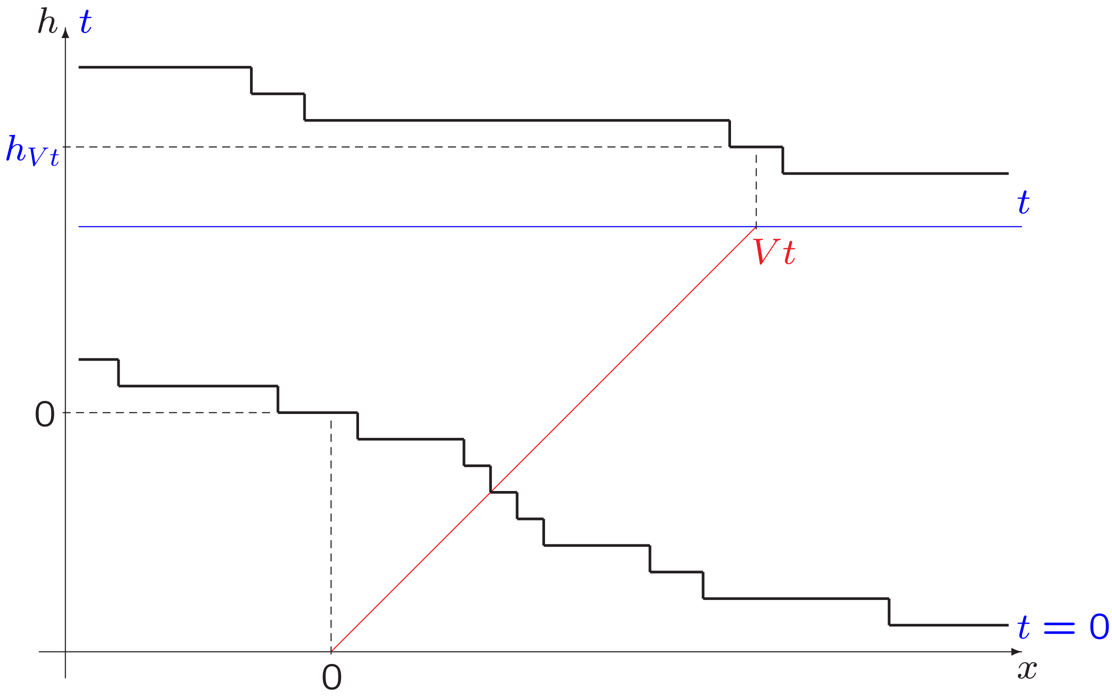
3. A növekedés fluktuációi



3. A növekedés fluktuációi



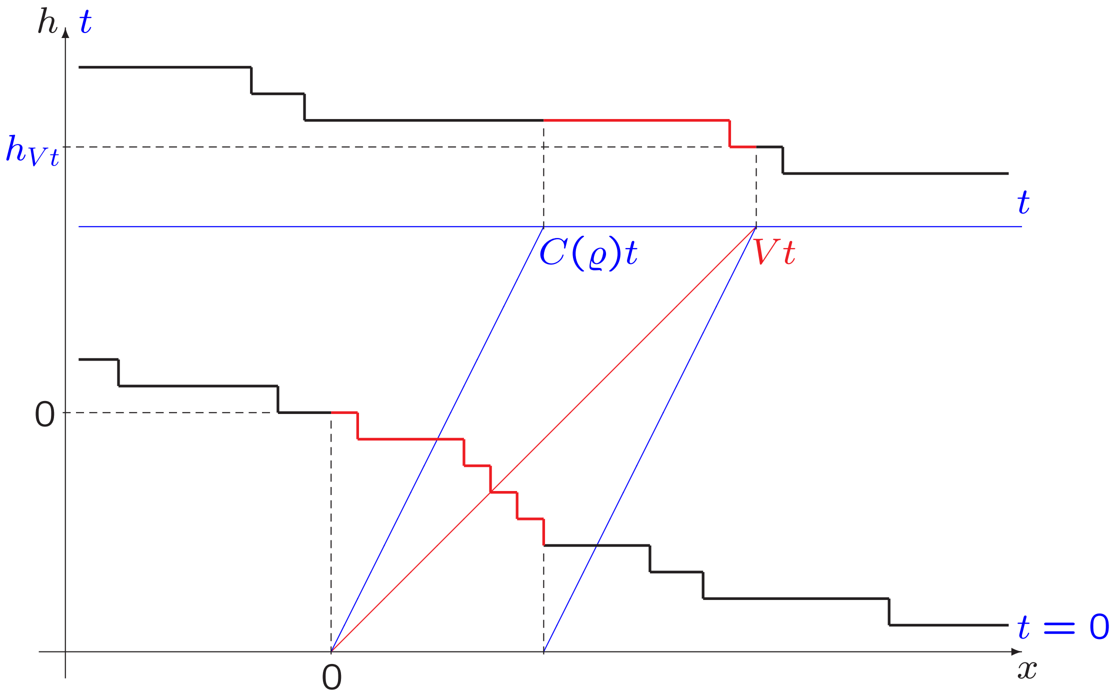
3. A növekedés fluktuációi



Ferrari - Fontes 1994:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{Vt}(t))}{t} = \text{konst} \cdot |C(\varrho) - V|.$$

3. A növekedés fluktuációi

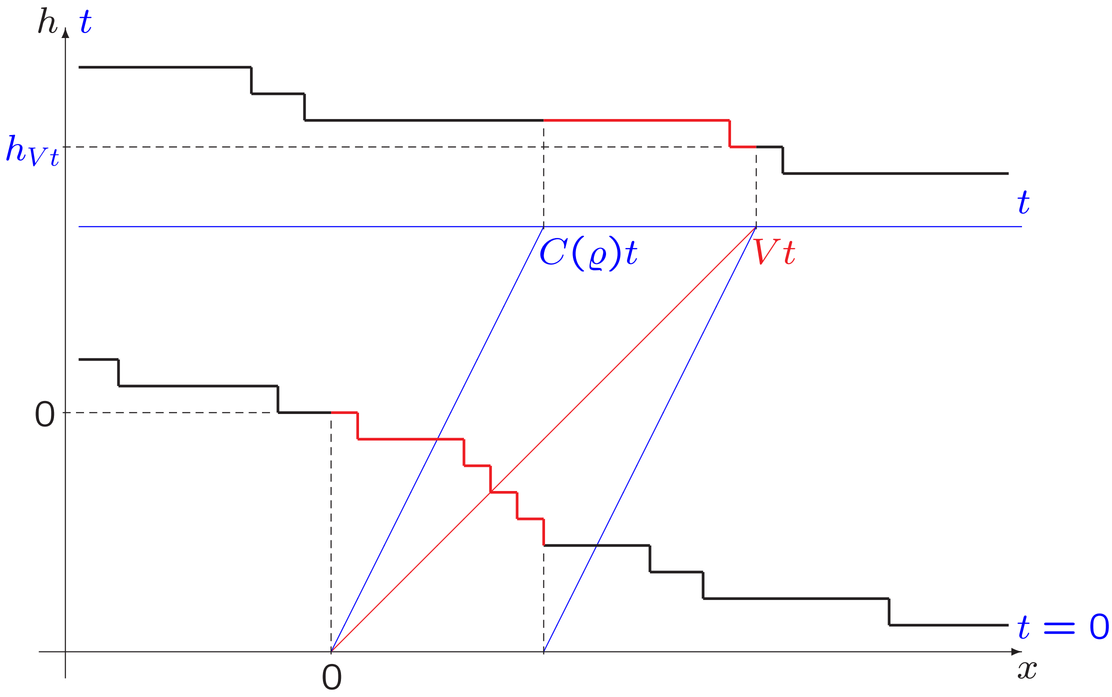


Ferrari - Fontes 1994:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{Vt}(t))}{t} = \text{konst} \cdot |C(\varrho) - V|.$$

$\rightsquigarrow$ A kezdeti fluktuációk a karakterisztikák mentén mozognak.

3. A növekedés fluktuációi



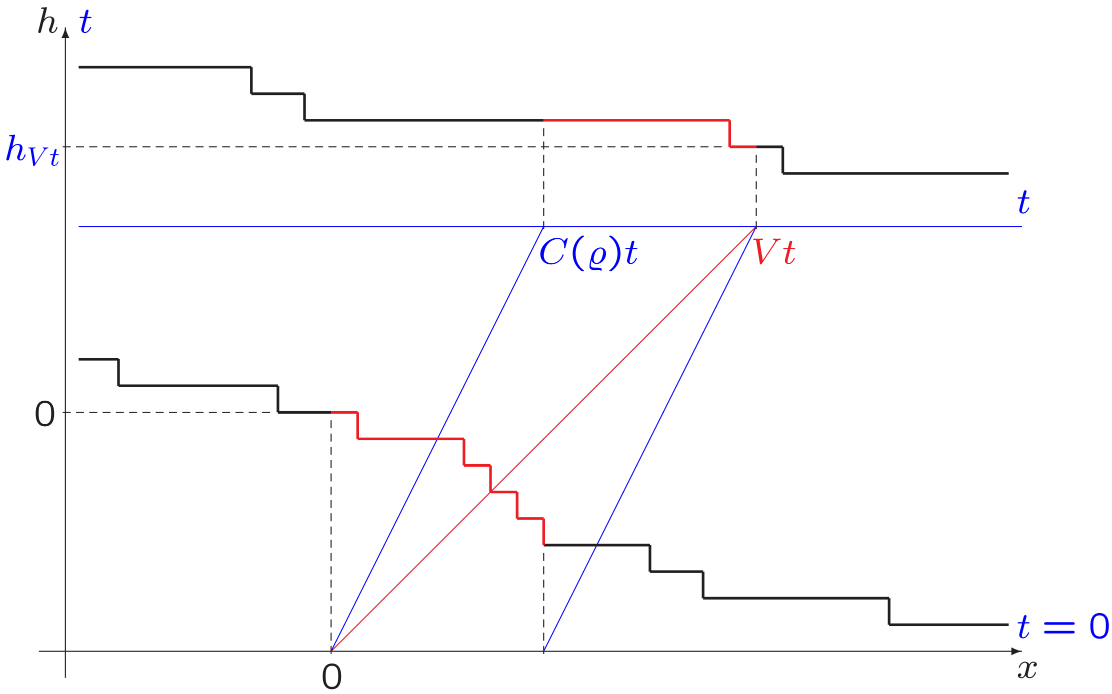
Ferrari - Fontes 1994:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{Vt}(t))}{t} = \text{konst} \cdot |C(\varrho) - V|.$$

$\rightsquigarrow$ A kezdeti fluktuációk a karakterisztikák mentén mozognak.

$\rightsquigarrow$ És ha $V = C(\varrho)$?

3. A növekedés fluktuációi



Ferrari - Fontes 1994:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{Vt}(t))}{t} = \text{konst} \cdot |C(\varrho) - V|.$$

$\rightsquigarrow$ A kezdeti fluktuációk a karakterisztikák mentén mozognak.

$\rightsquigarrow$ És ha $V = C(\varrho)$?

Sejtés:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} = [\text{vmi. nemtriviális}].$$

3. A növekedés fluktuációi

Tétel: Minden $0 < \varrho < 1$ és $q < p$ paraméterre

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} < \infty.$$

3. A növekedés fluktuációi

Tétel: Minden $0 < \varrho < 1$ és $q < p$ paraméterre

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} < \infty.$$

A *teljesen* aszimmetrikus kizárásos folyamatra (TASEP: $p = 1,\ q = 0$) $h_{C(\varrho)t}(t)/t^{1/3}$ határeloszlását Baik, Deift és Johansson 1999, Johansson 2000, valamint Ferrari és Spohn 2006 azonosították a Tracy-Widom eloszlás formájában (GUE véletlen mátrixok).

3. A növekedés fluktuációi

Tétel: Minden $0 < \varrho < 1$ és $q < p$ paraméterre

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} < \infty.$$

A *teljesen* aszimmetrikus kizárásos folyamatra ($TASEP$: $p = 1, \;\; q = 0$) $h_{C(\varrho)t}(t)/t^{1/3}$ határeloszlását Baik, Deift és Johansson 1999, Johansson 2000, valamint Ferrari és Spohn 2006 azonosították a Tracy-Widom eloszlás formájában (GUE véletlen mátrixok).

Az ő módszerük: Last passage perkoláció, nehéz kombinatorika és aszimptotikus analízis.

3. A növekedés fluktuációi

Tétel: Minden $0 < \varrho < 1$ és $q < p$ paraméterre

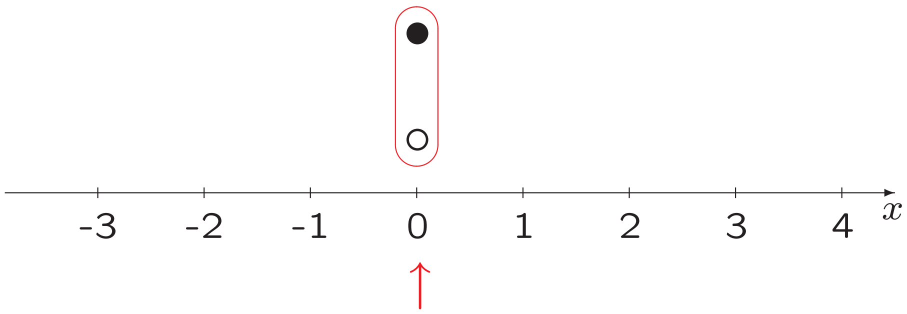
$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} < \infty.$$

A *teljesen* aszimmetrikus kizárásos folyamatra (TASEP: $p = 1,\ \ q = 0$) $h_{C(\varrho)t}(t)/t^{1/3}$ határeloszlását Baik, Deift és Johansson 1999, Johansson 2000, valamint Ferrari és Spohn 2006 azonosították a Tracy-Widom eloszlás formájában (GUE véletlen mátrixok).

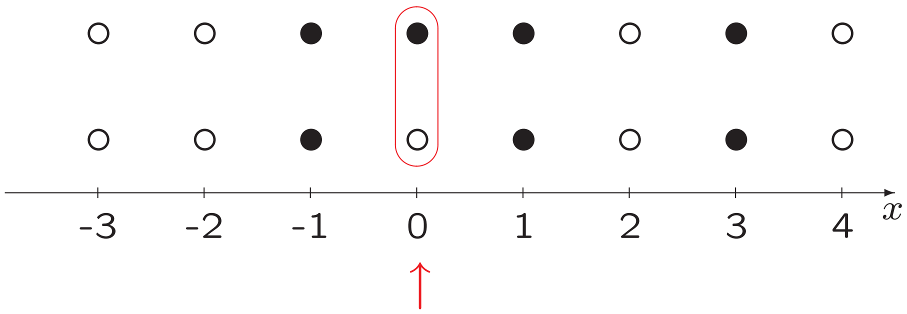
Az ő módszerük: Last passage perkoláció, nehéz kombinatorika és aszimptotikus analízis.

$\rightsquigarrow$ Más módszerekhez kellett folyamodnunk. Előzmények: Cator és Groeneboom 2006 (Hammersley folyamat), B., Cator és Seppäläinen 2006 (TASEP, last passage).

4. A másodosztályú részecske

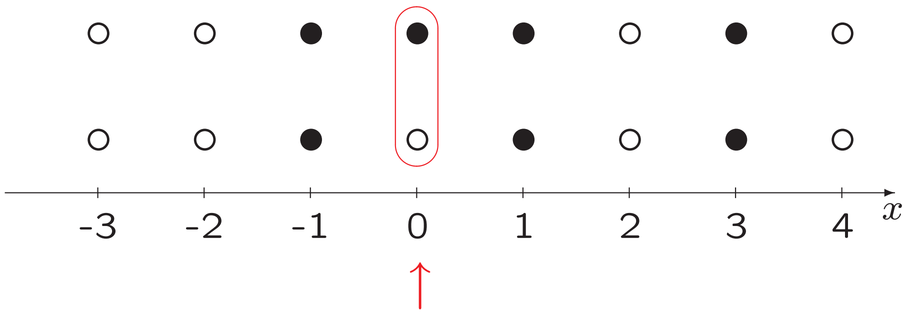


4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

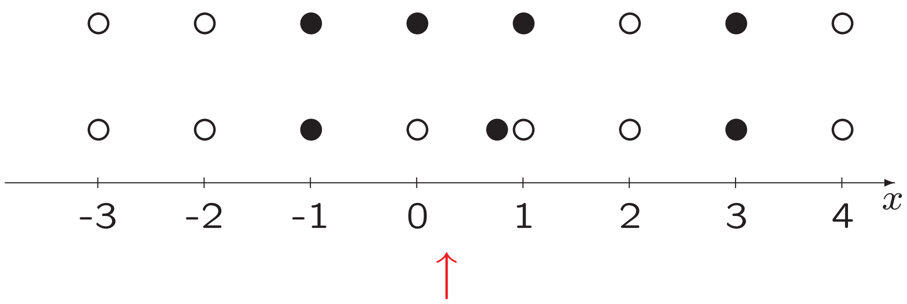
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

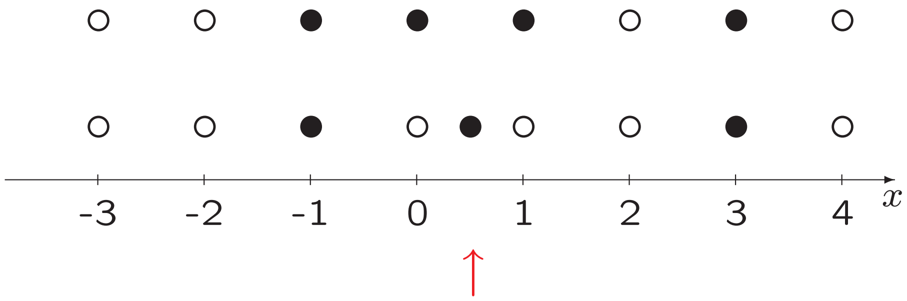
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

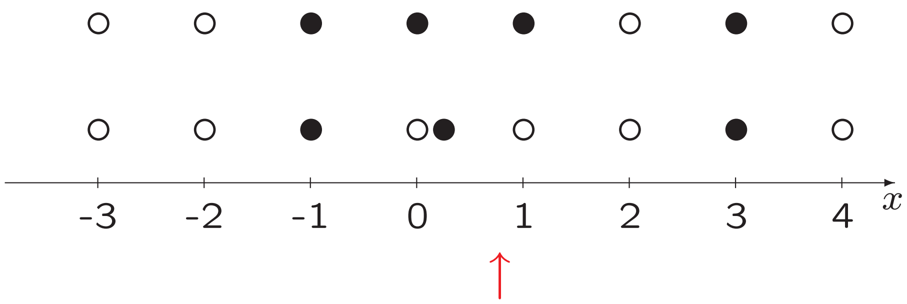
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

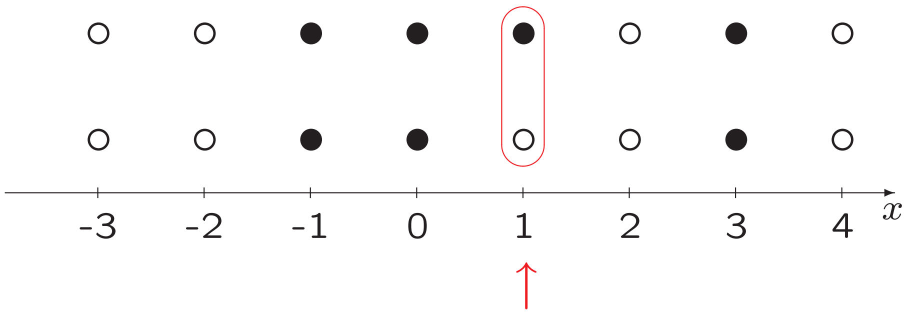
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

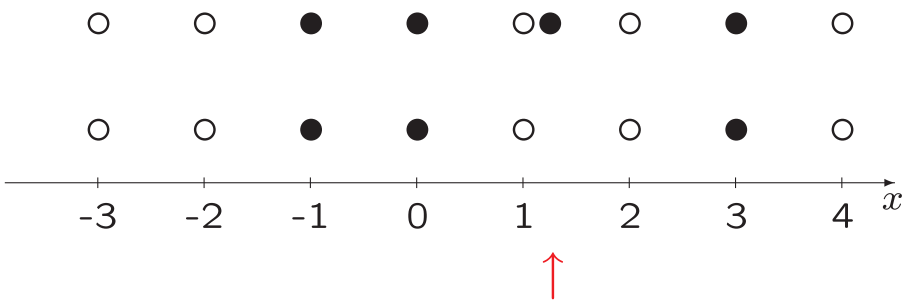
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

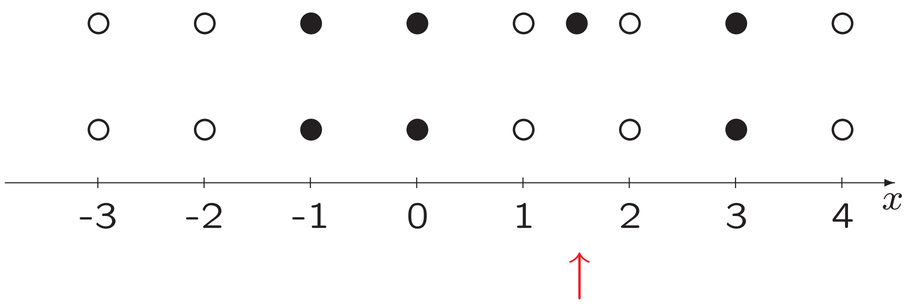
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

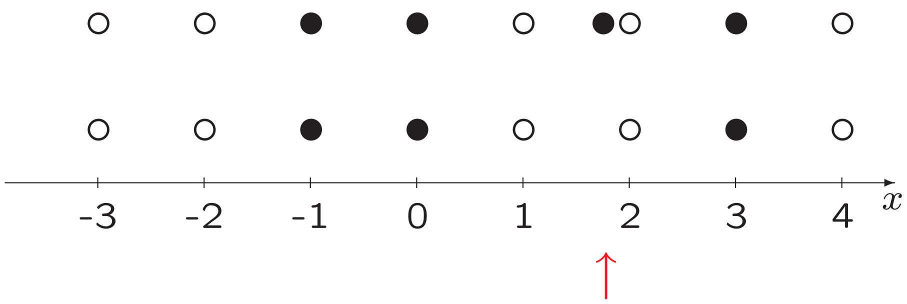
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

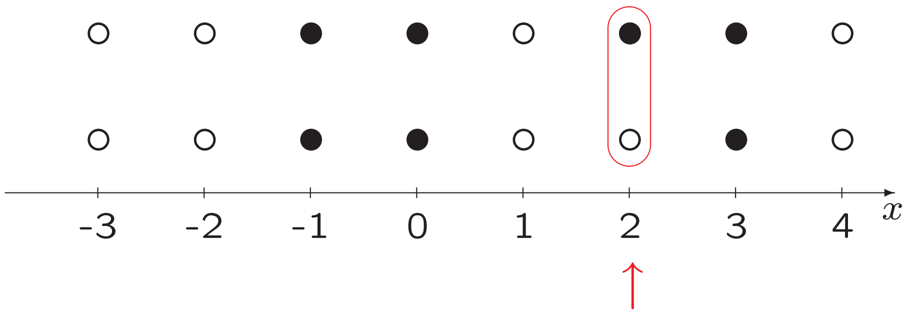
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

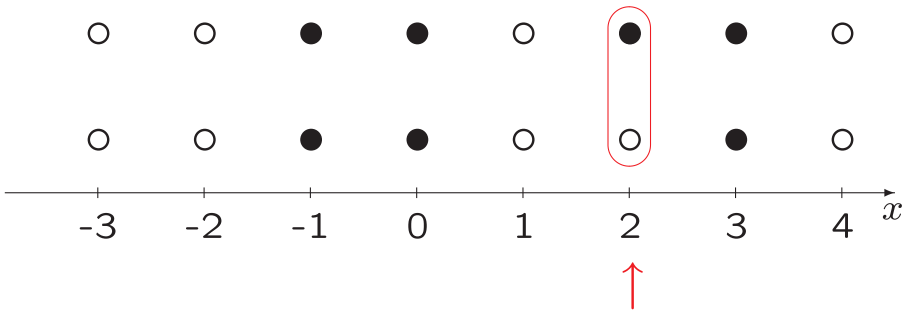
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad

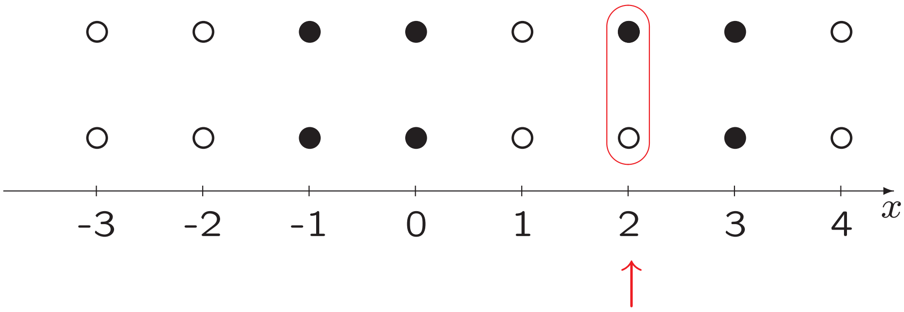
4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad = a másodosztályú részecske. A pozíciója t-kor $Q(t)$.

4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

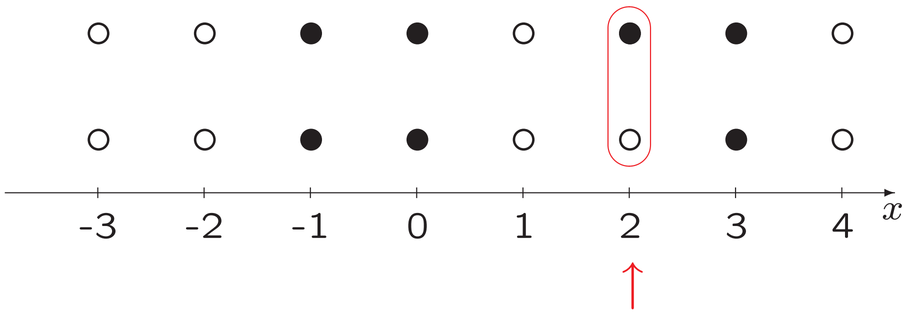
Csatolás: Az egy darab különbség megmarad = a másodosztályú részecske. A pozíciója t-kor $Q(t)$.

Tétel:

$$\mathbf{E}(Q(t)) = C(\varrho)t$$

(karakterisztikus sebesség),

4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad = a másodosztályú részecske. A pozíciója t-kor $Q(t)$.

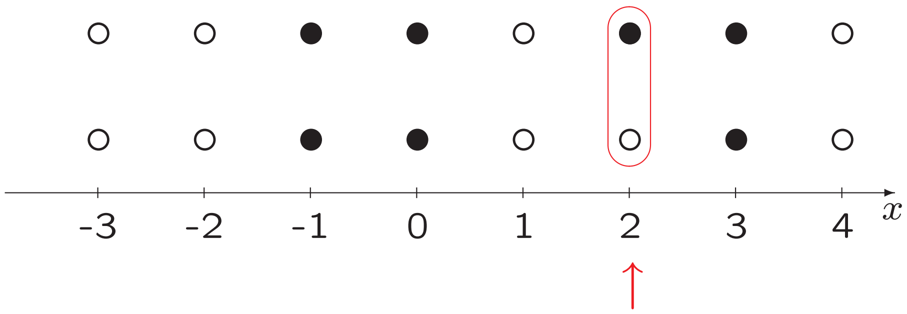
Tétel:

$$\mathbf{E}(Q(t)) = C(\varrho)t$$

(karakterisztikus sebesség), és

$$\textbf{Var}(h_{Vt}(t)) = \text{konst} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - Vt|.$$

4. A másodosztályú részecske



Bernoulli(ϱ) eloszlás kivéve a 0-ban

Csatolás: Az egy darab különbség megmarad = a másodosztályú részecske. A pozíciója t-kor $Q(t)$.

Tétel:

$$\mathbf{E}(Q(t)) = C(\varrho)t$$

(karakterisztikus sebesség), és

$$\mathbf{Var}(h_{Vt}(t)) = \text{konst} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - Vt|.$$

A bizonyítás Bálint ötletén alapul, szerinte ez standard.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

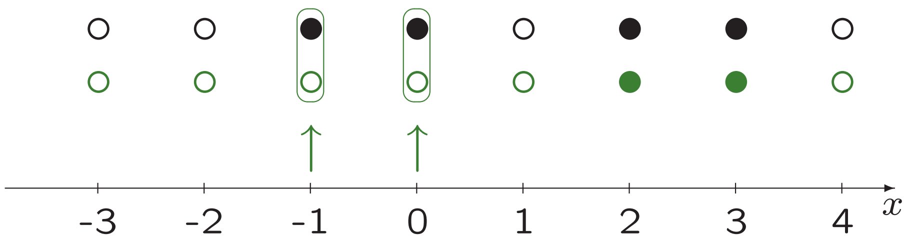
Ekkor a „felső" marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó" Bernoulli(λ).

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:

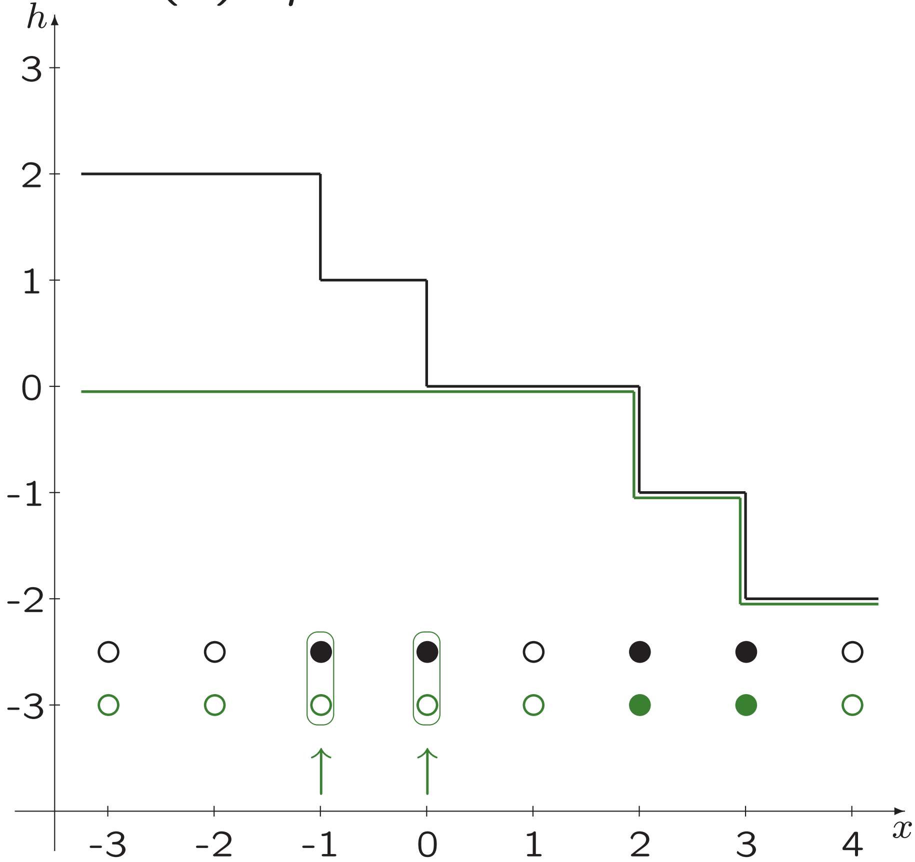


A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:

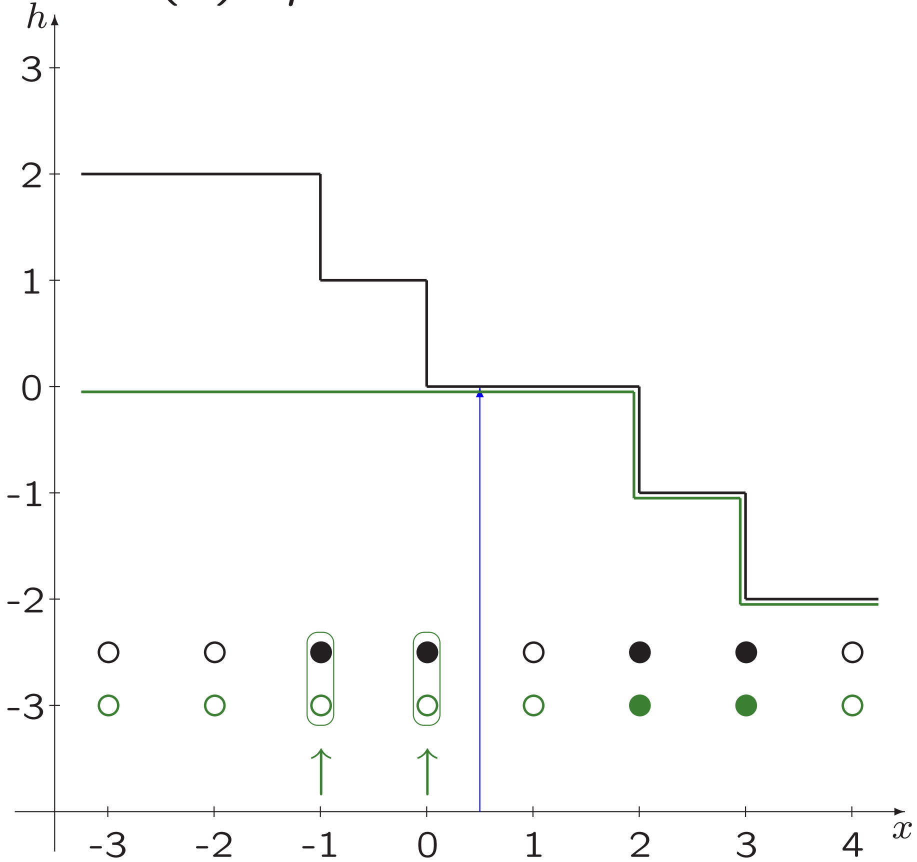


A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



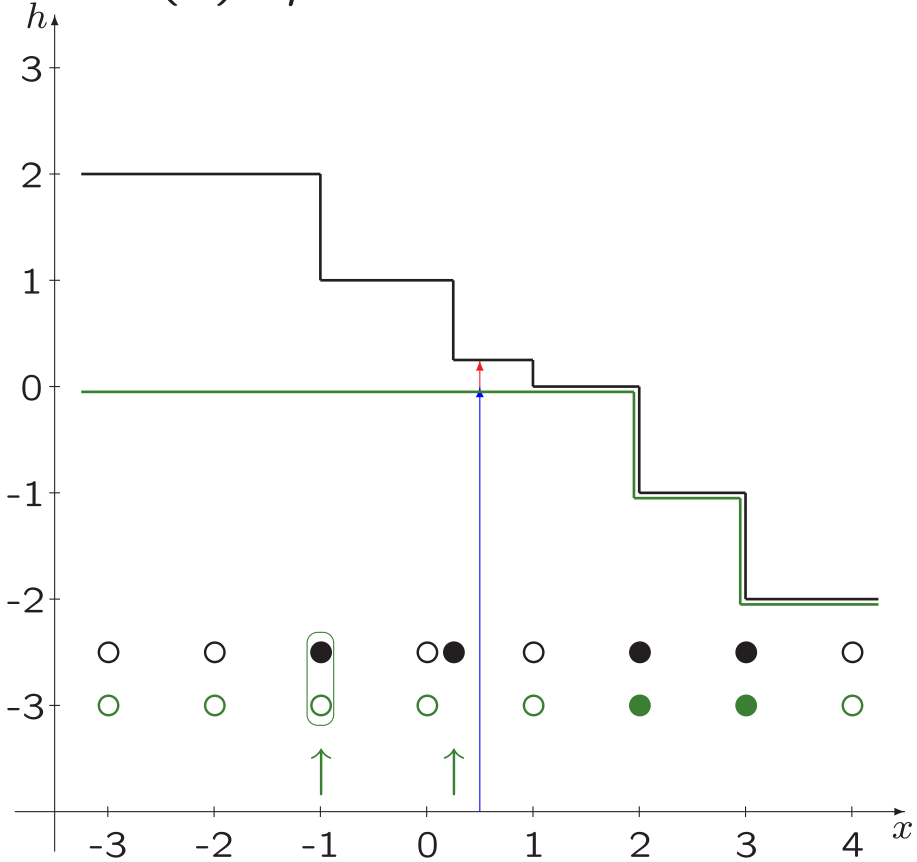
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



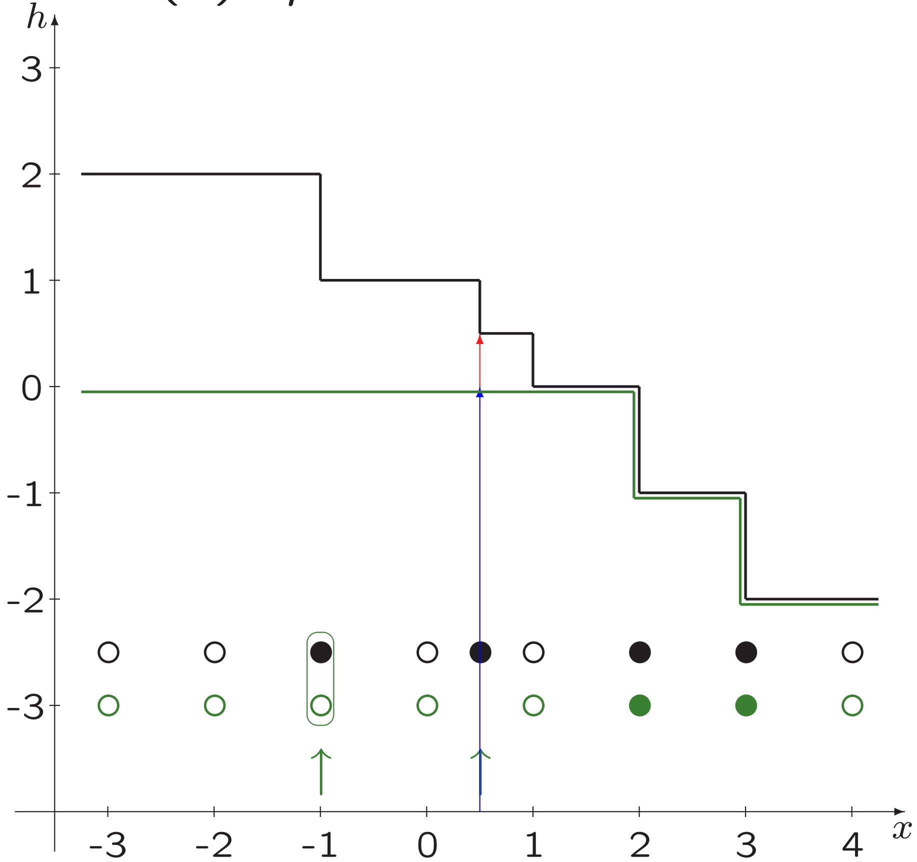
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



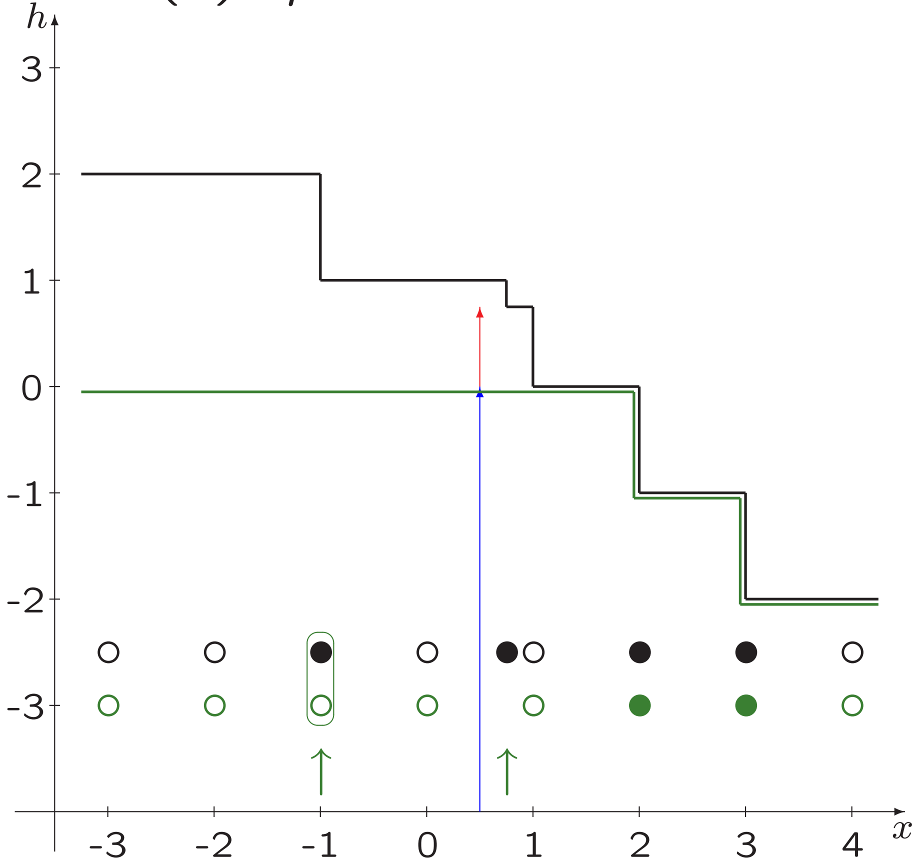
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege ($V \in \mathbb{R}$).

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



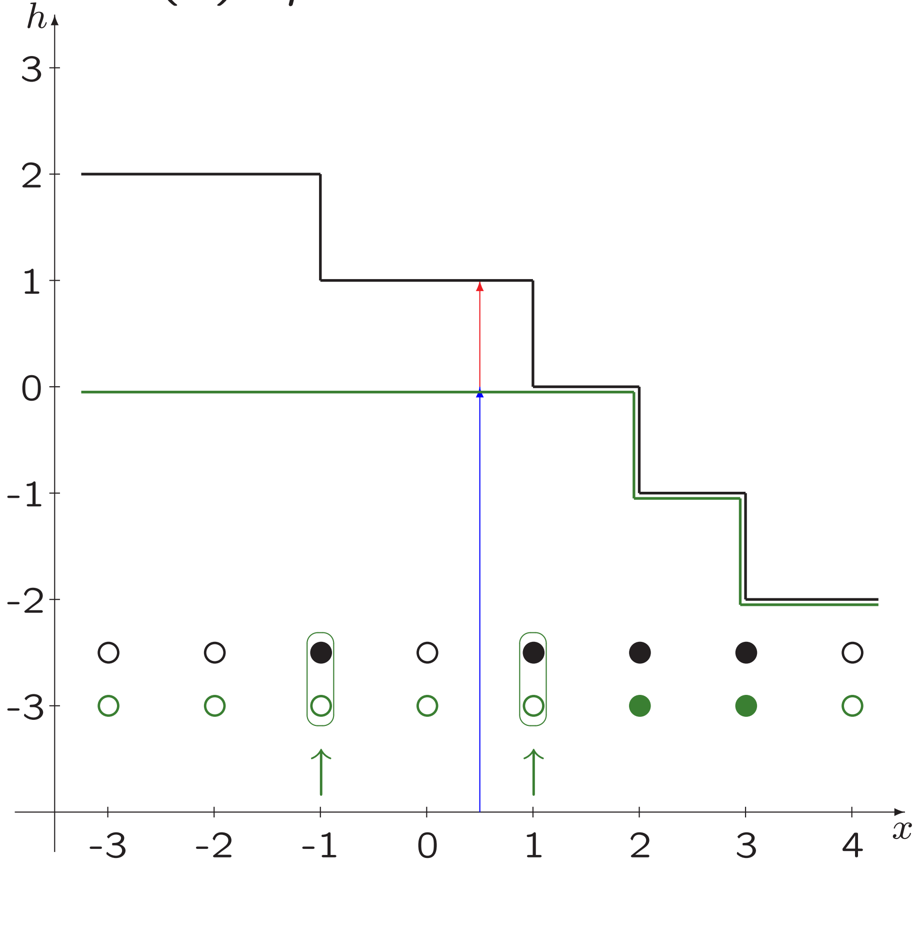
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t) =$ a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege ($V \in \mathbb{R}$).

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



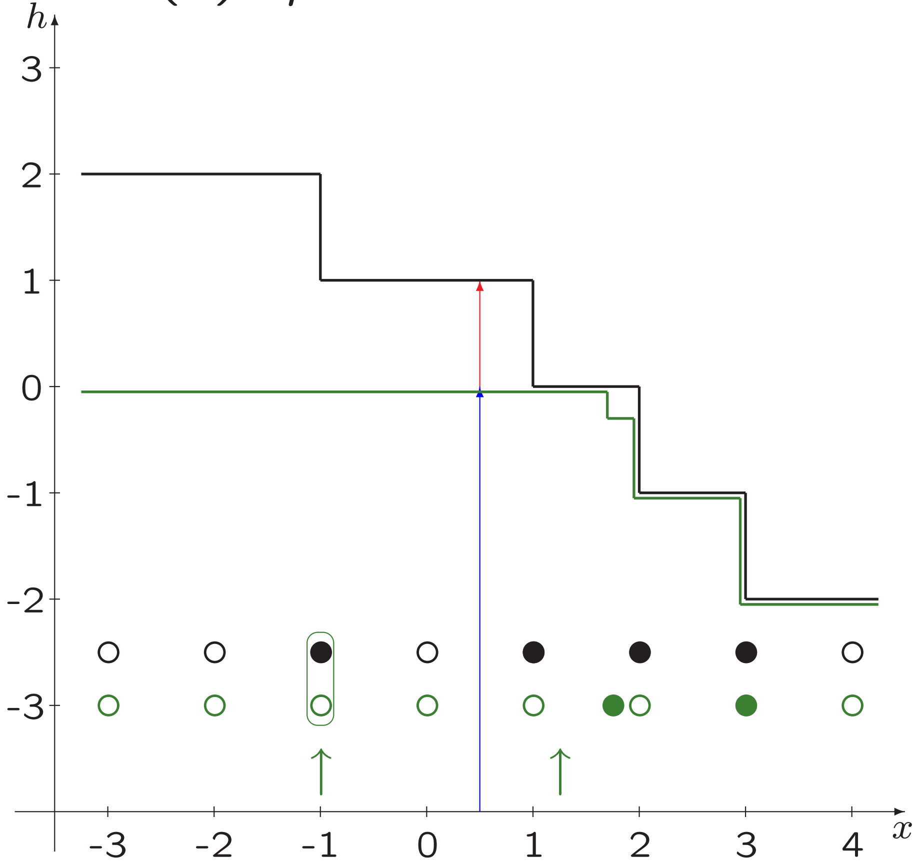
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



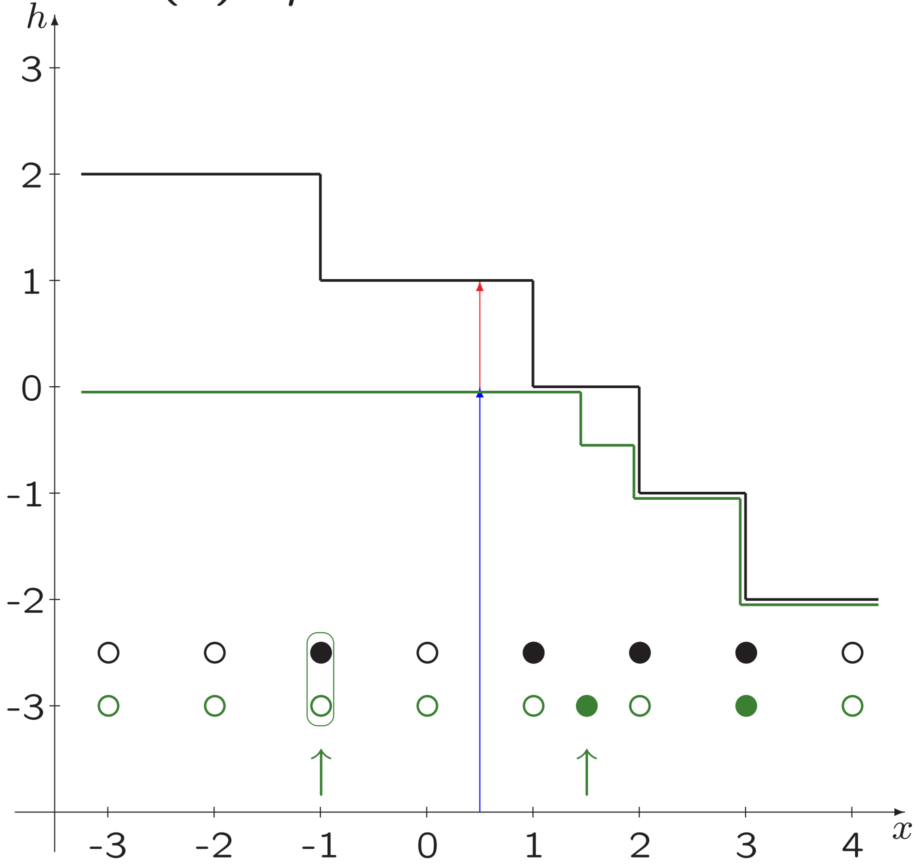
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



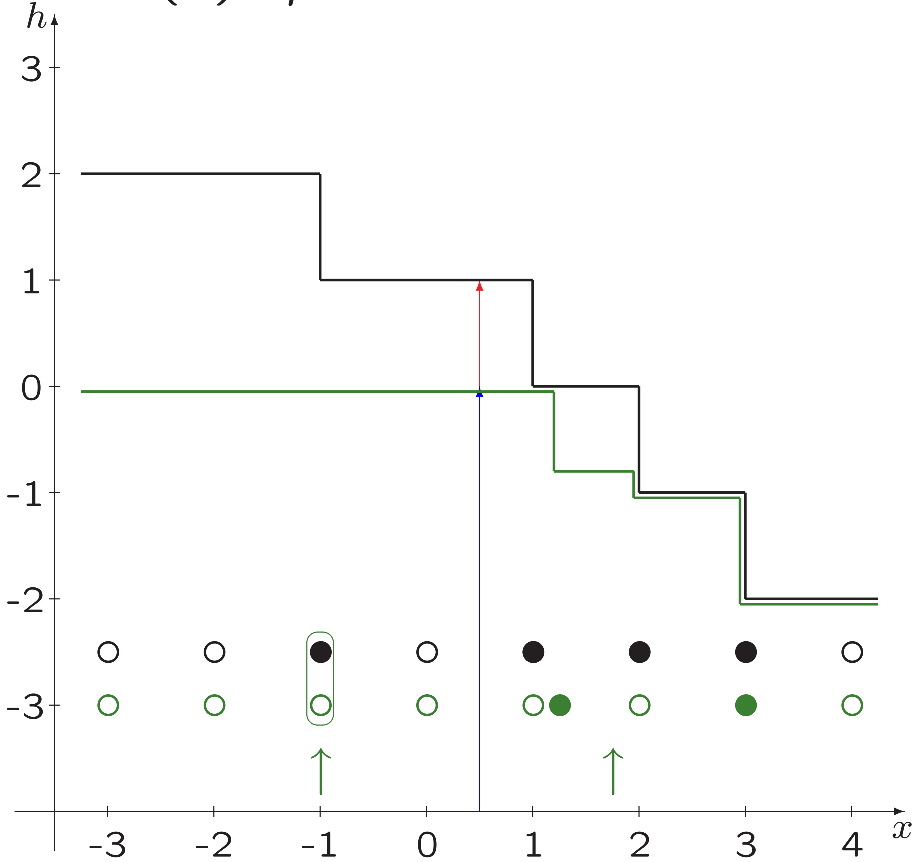
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



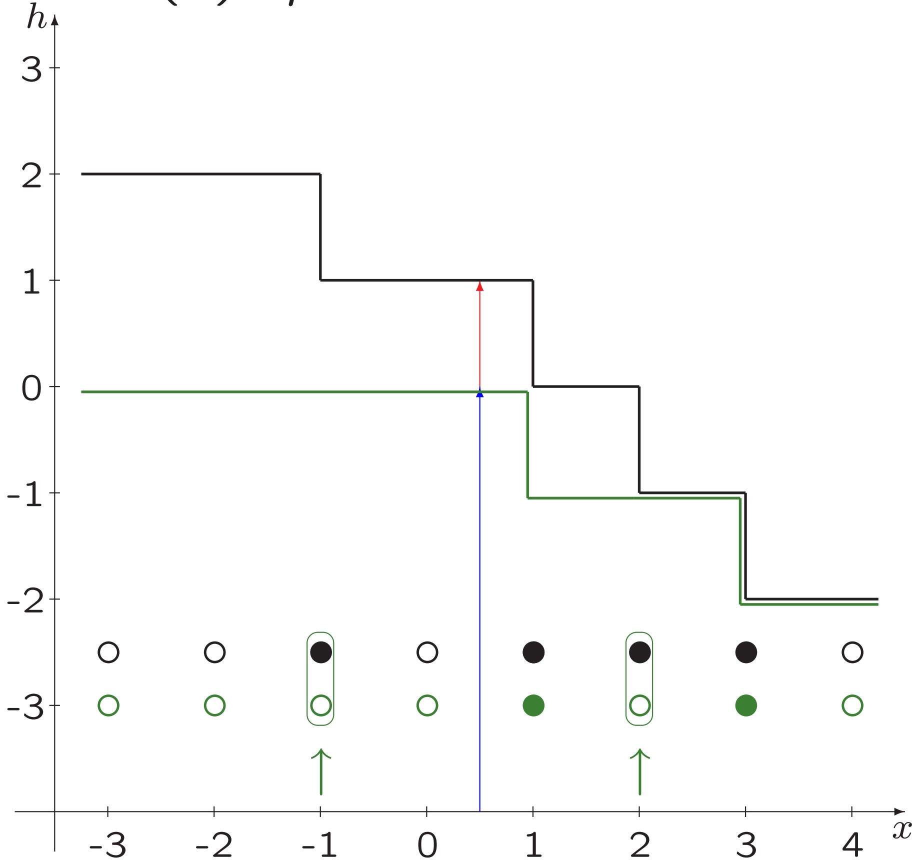
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



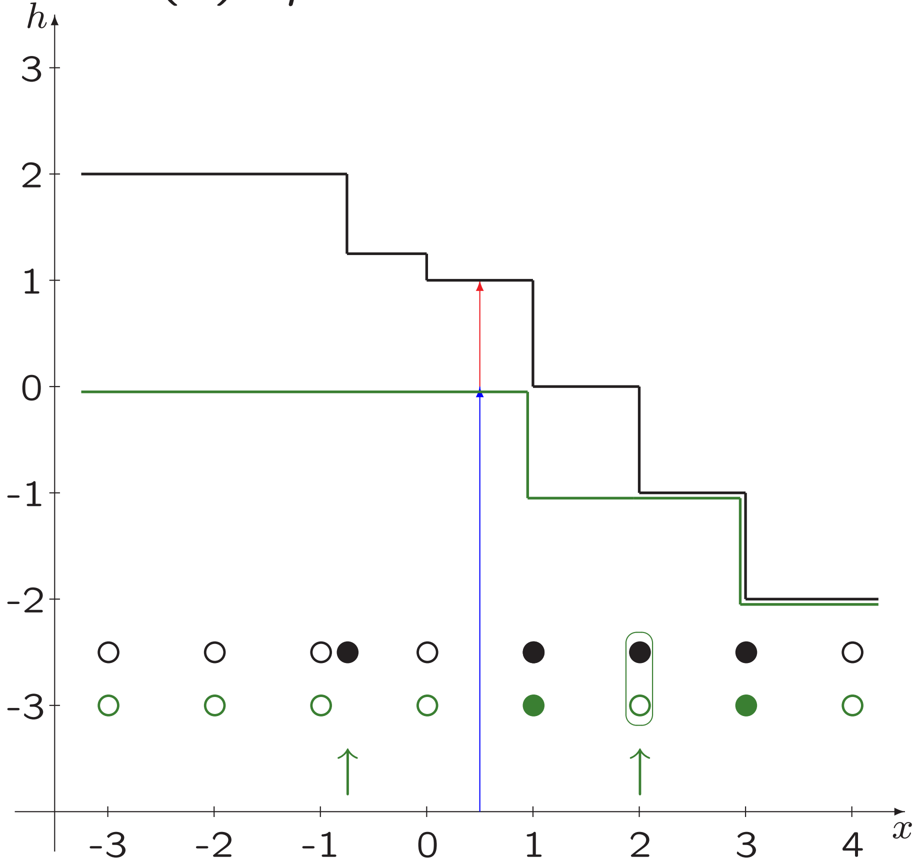
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



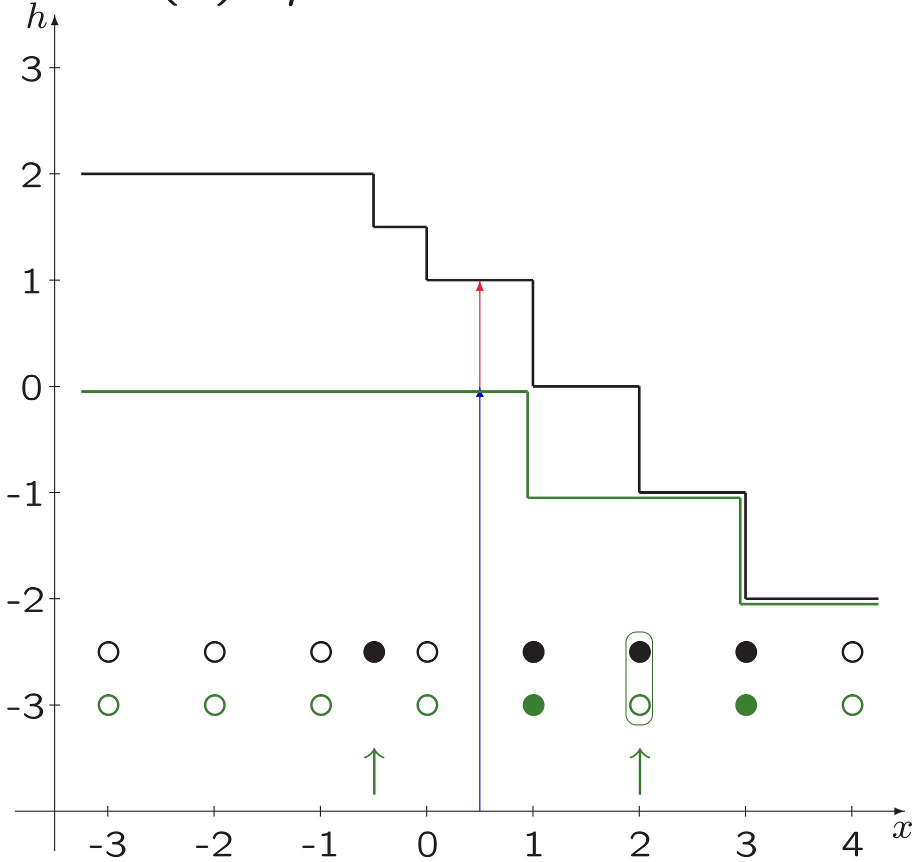
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege ($V \in \mathbb{R}$).

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



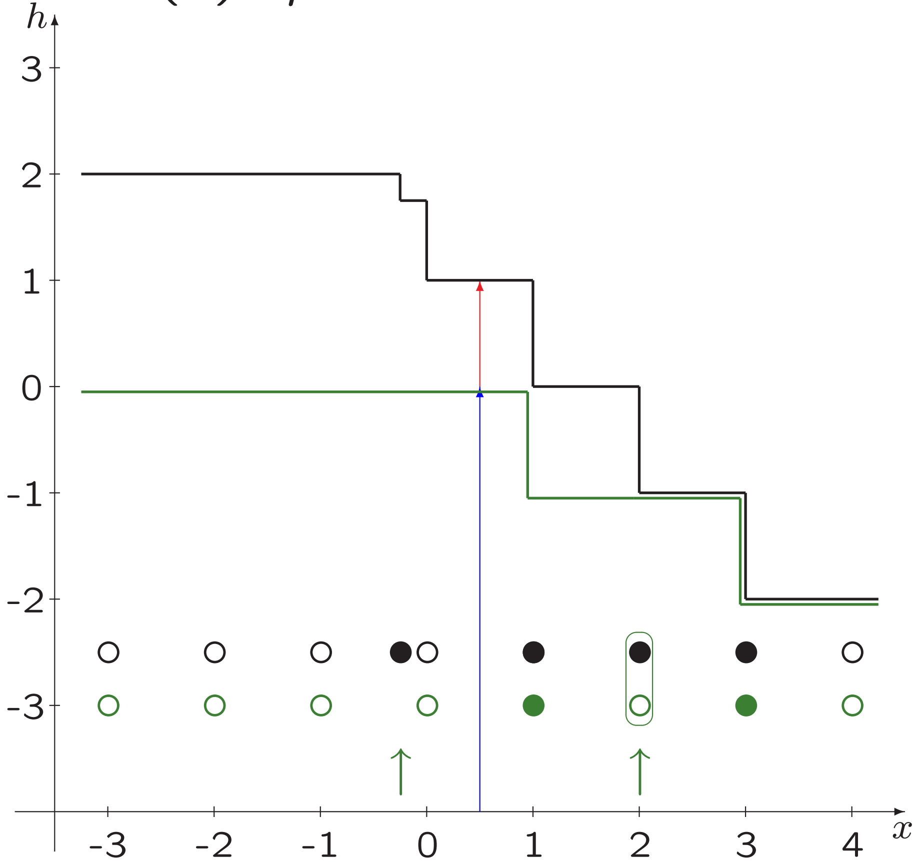
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



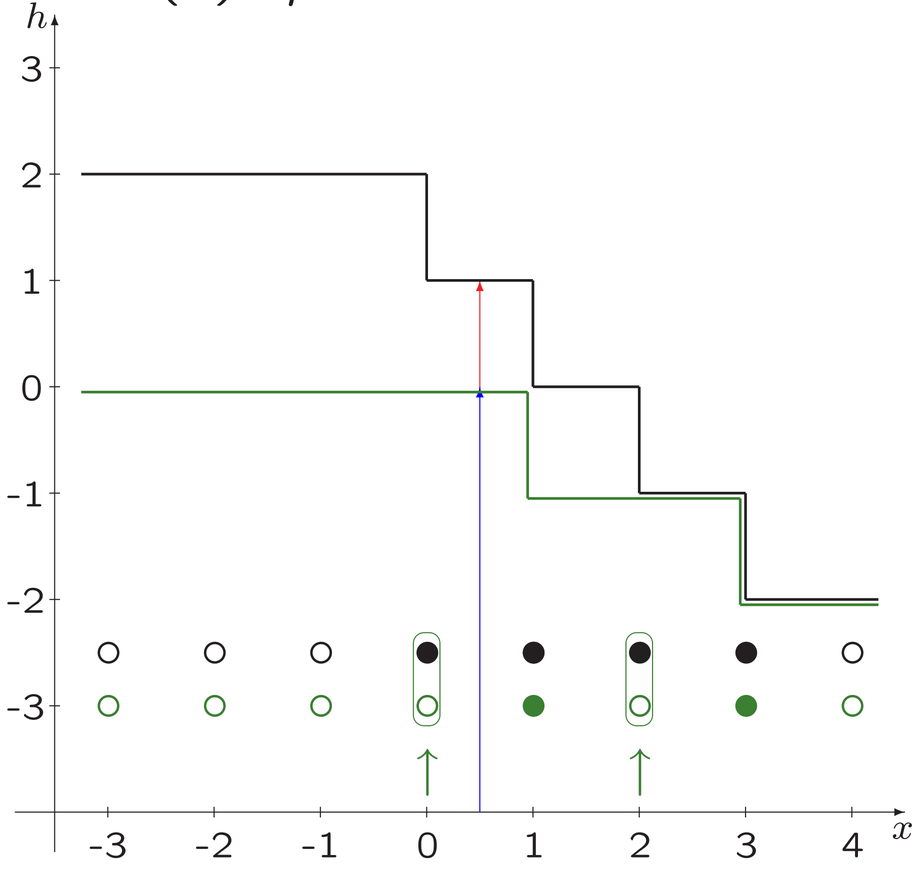
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



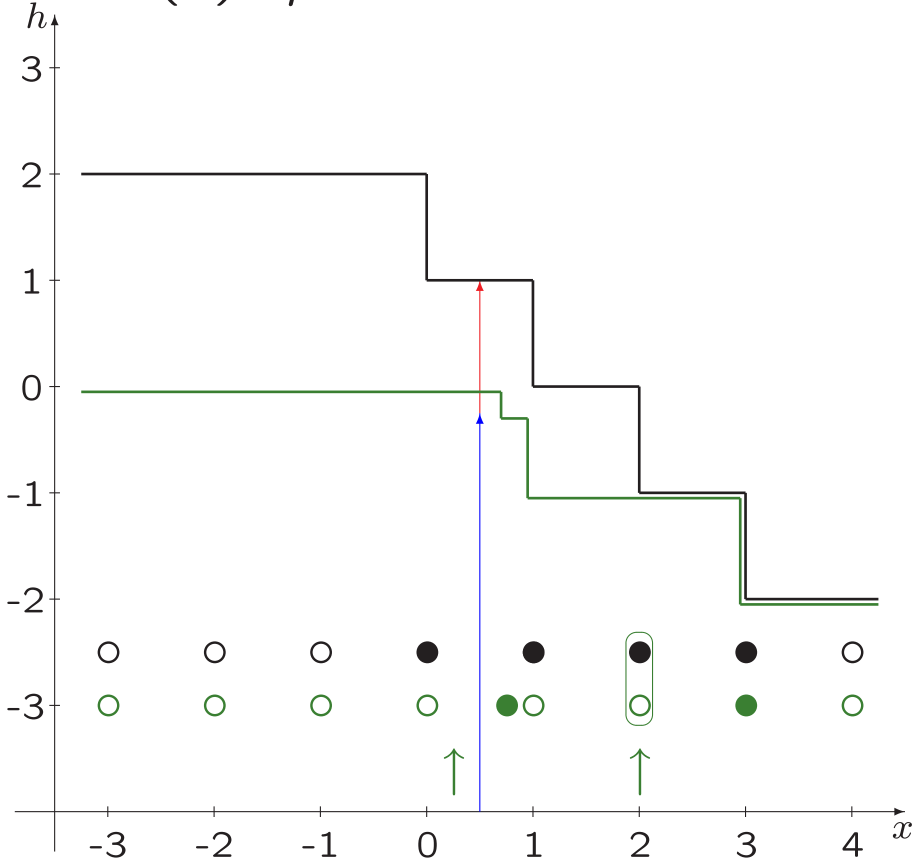
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



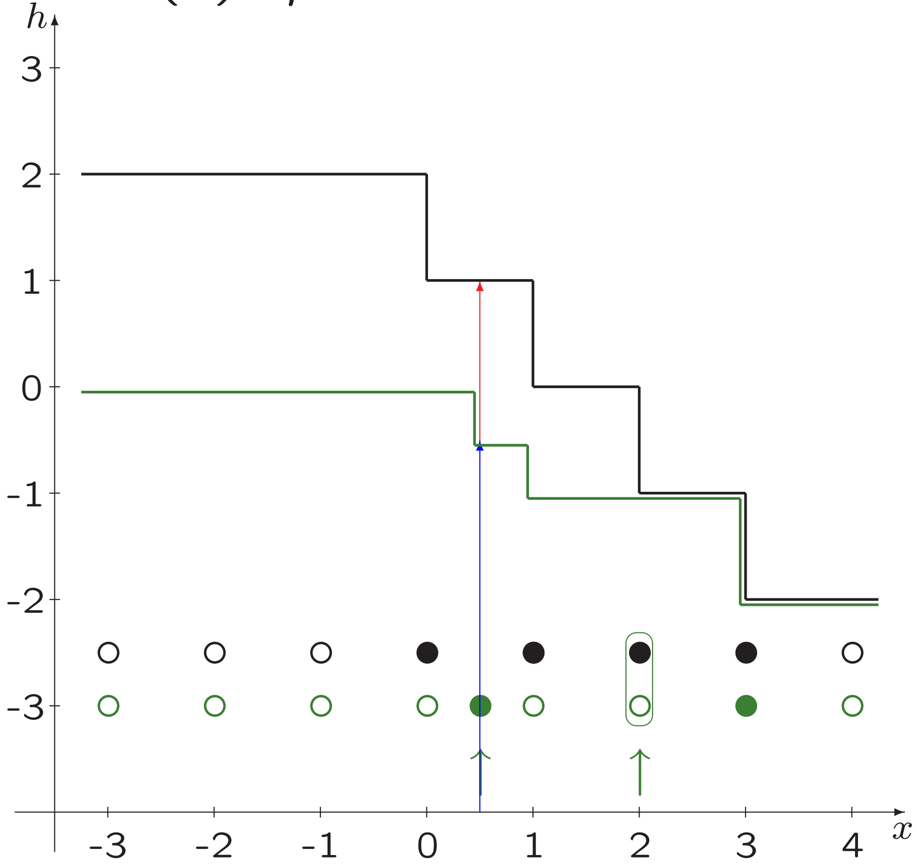
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



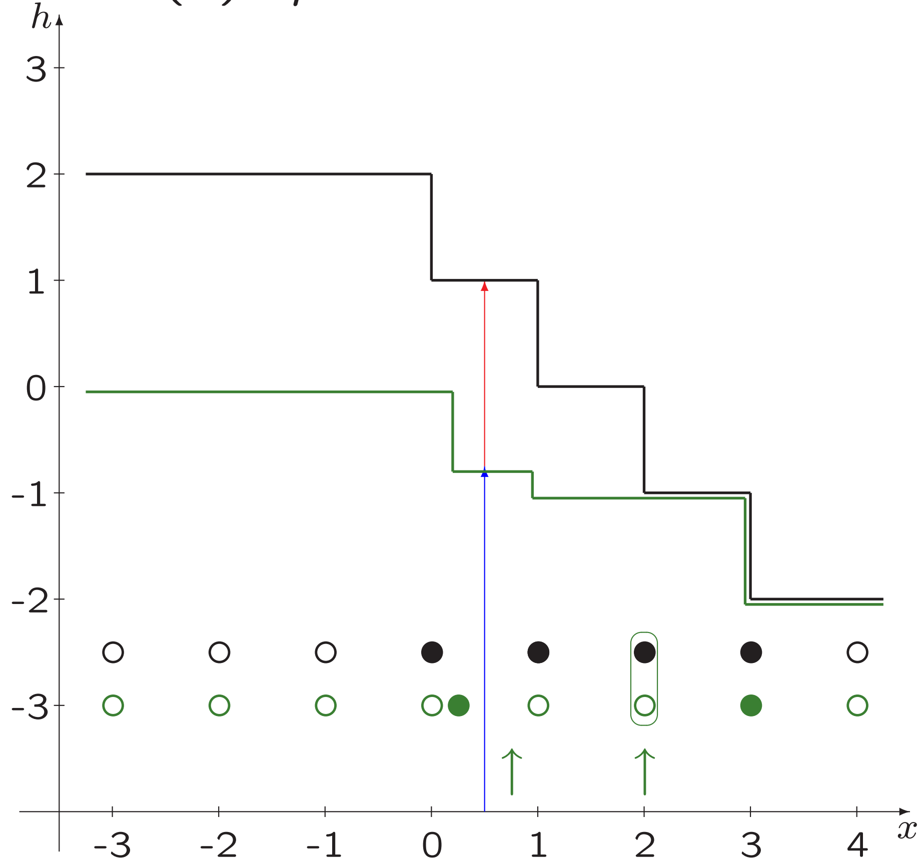
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



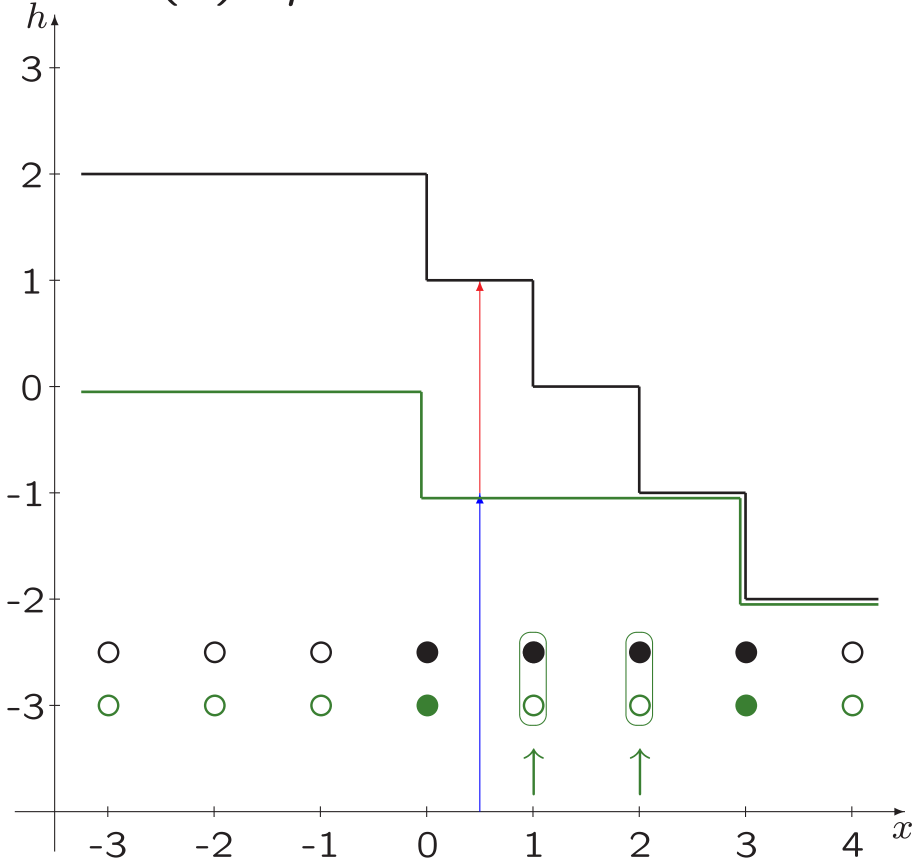
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



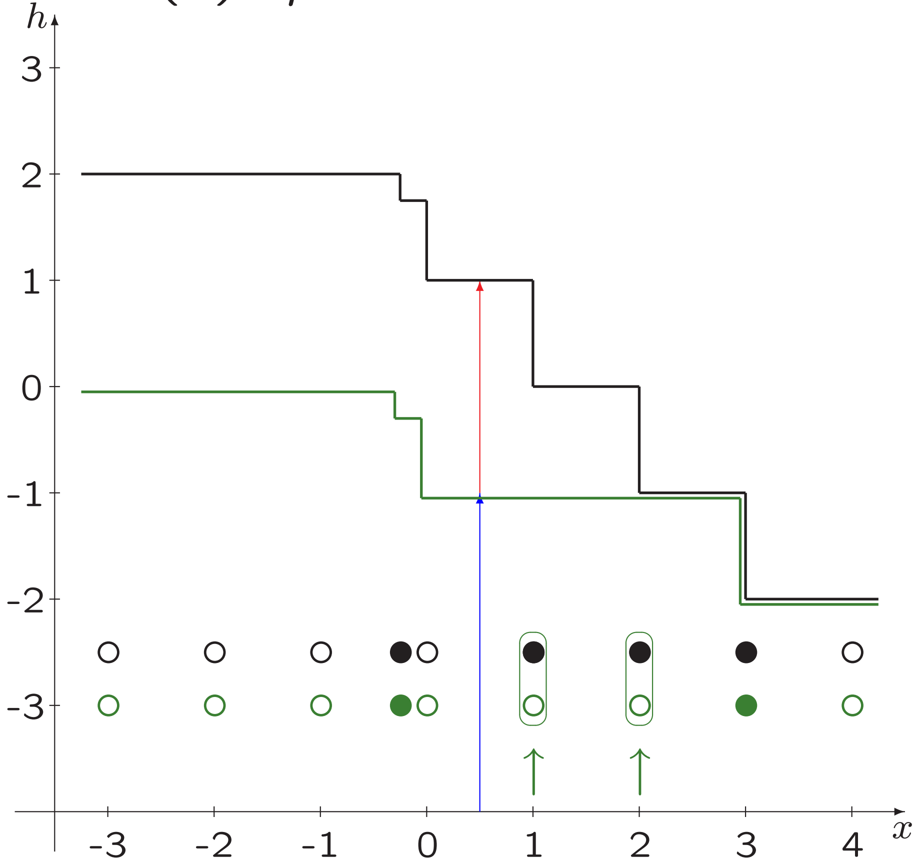
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



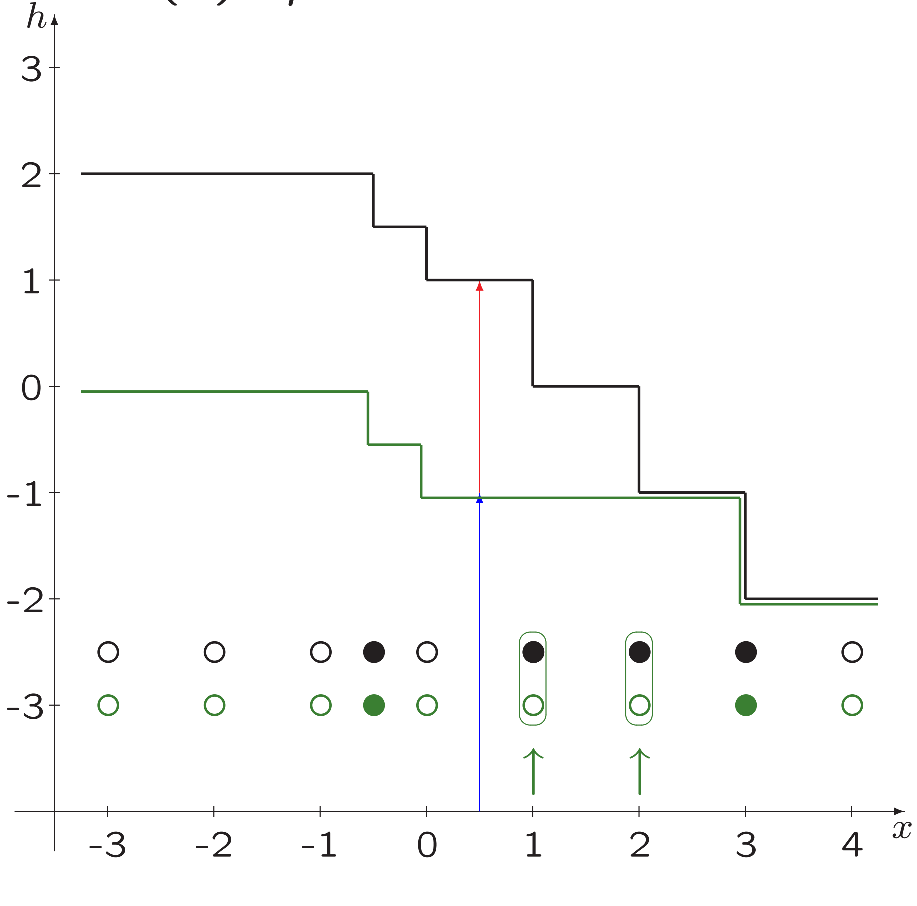
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege ($V \in \mathbb{R}$).

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



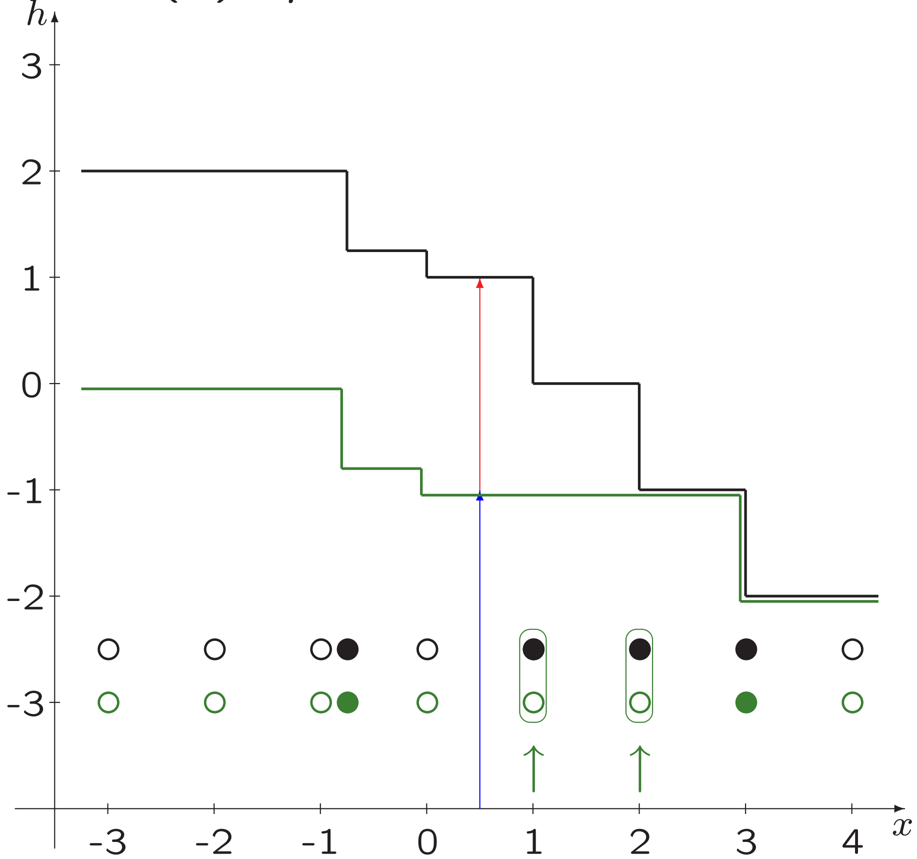
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \qquad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \qquad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:



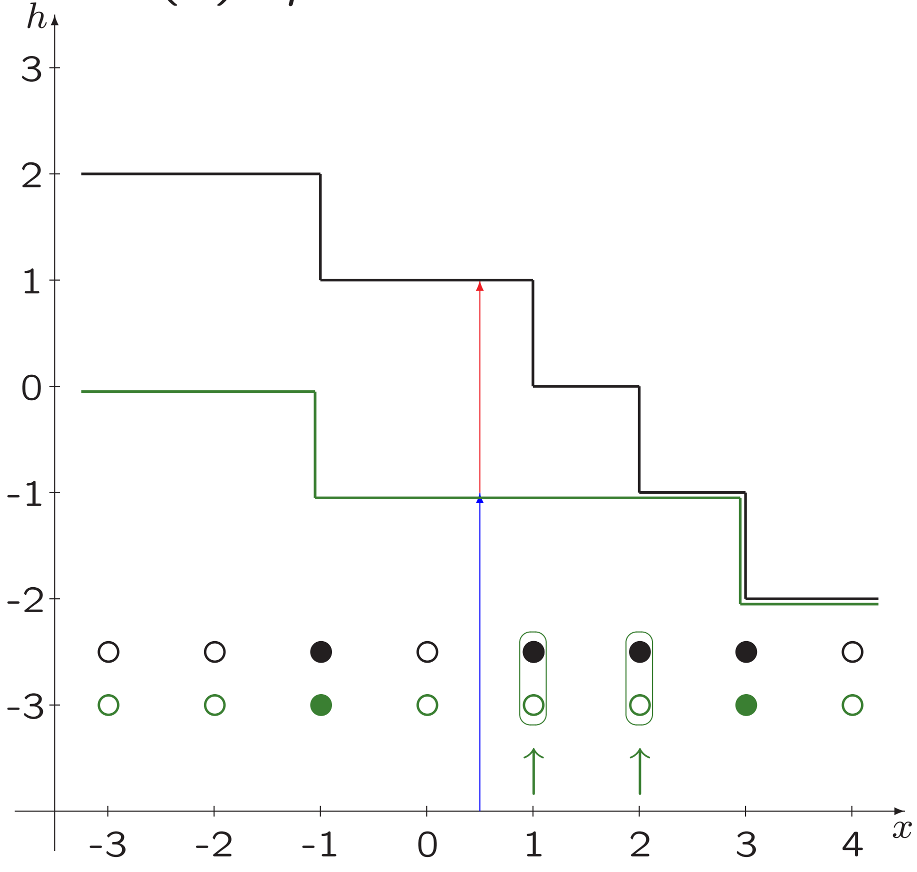
$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró ↑-k előjeles számának összege ($V \in \mathbb{R}$).

A csatolási mérték

Legyen $\lambda < \varrho$, és

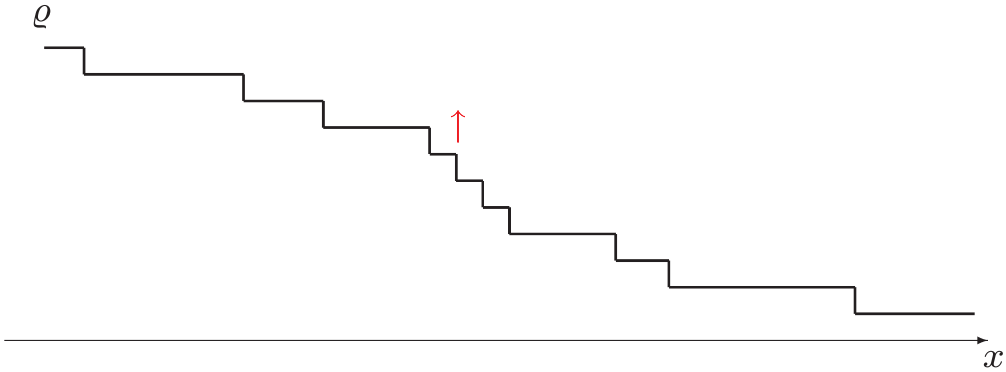
$$\mu\binom{\circ}{\circ} = 1 - \varrho, \quad \mu\binom{\bullet}{\circ} = \varrho - \lambda, \quad \mu\binom{\bullet}{\bullet} = \lambda.$$

Ekkor a „felső” marginális Bernoulli(ϱ), az „alsó” Bernoulli(λ). μ szorzata szerint:

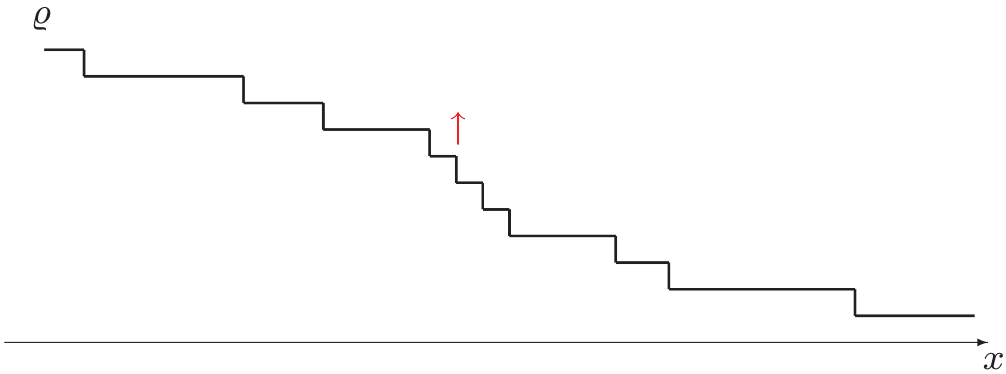


$h_{Vt}(t) - h_{Vt}(t)$ = a mozgó Vt ablak fölött átugró $\uparrow$-k előjeles számának összege $(V \in \mathbb{R})$.

5. A felső korlát

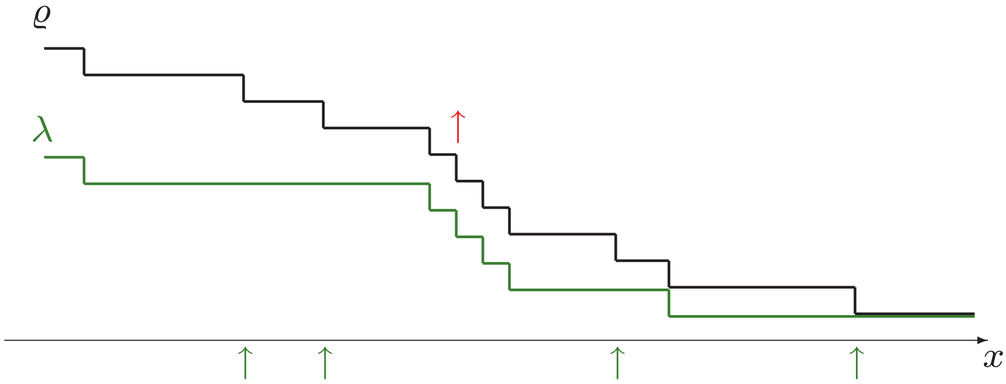


5. A felső korlát



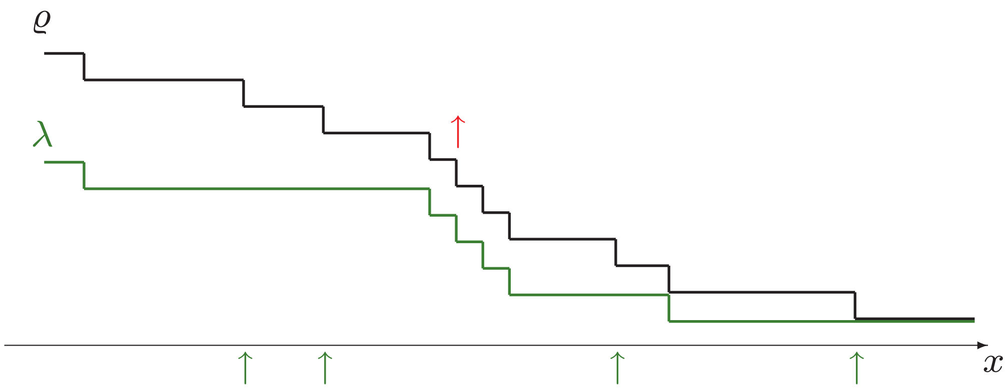
Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t

5. A felső korlát



Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a $\uparrow$-kal.

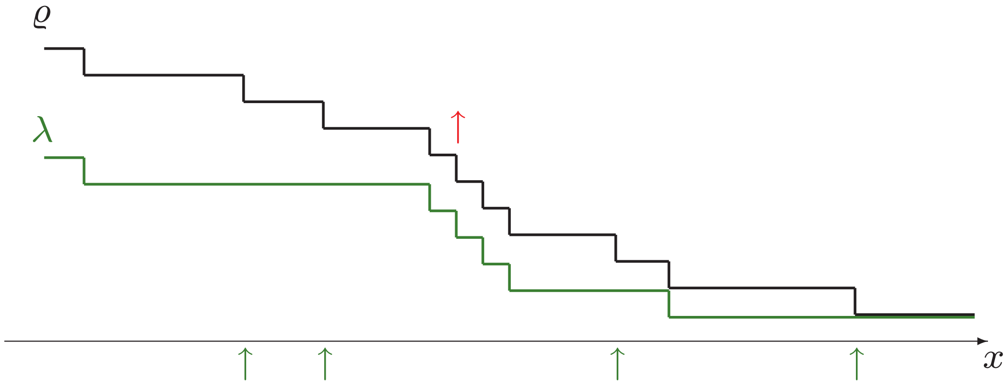
5. A felső korlát



Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a $\uparrow$-kal.

$\mathbf{P}\{Q(t)$ túl nagy$\}$

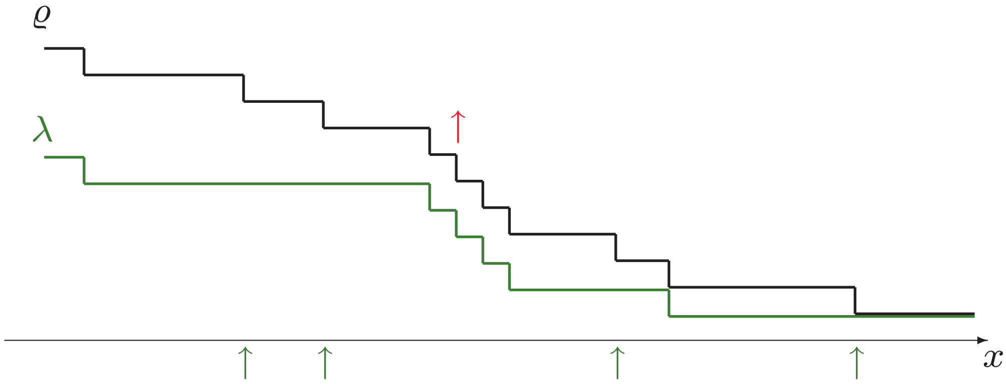
5. A felső korlát



Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a $\uparrow$-kal.

$$\mathbf{P}\{Q(t) \text{ túl nagy}\}$$
$$\leq \mathbf{P}\{\text{túl sok } \uparrow \text{ keresztezte } C(\varrho)t\text{-t}\}$$

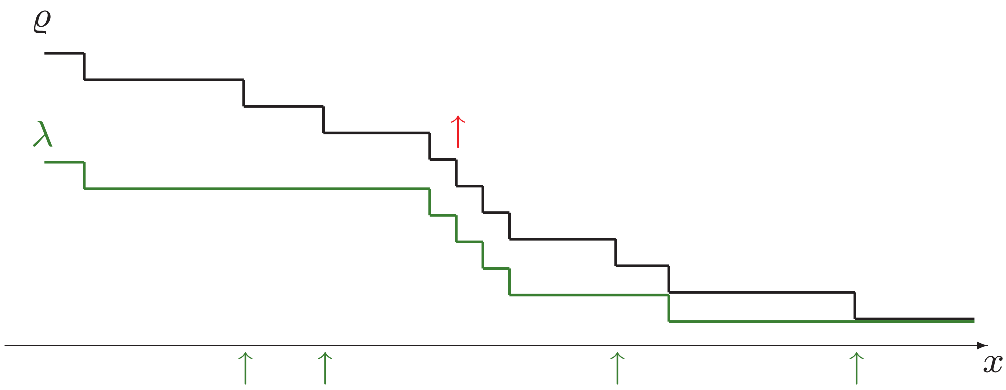
5. A felső korlát



Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a $\uparrow$-kal.

$$\mathbf{P}\{Q(t) \text{ túl nagy}\}$$
$$\le \mathbf{P}\{\text{túl sok} \uparrow \text{ keresztezte } C(\varrho)t\text{-t}\}$$
$$\le \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) - h_{C(\varrho)t}(t) \text{ túl nagy}\}.$$

5. A felső korlát

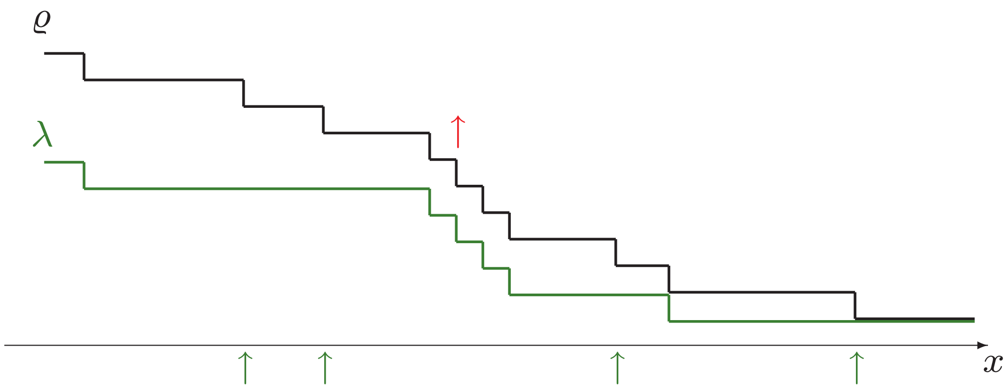


Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a $\uparrow$-kal.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{Q(t) \text{ túl nagy}\} \\
&\qquad\qquad \le \mathbf{P}\{\text{túl sok} \uparrow \text{keresztezte } C(\varrho)t\text{-t}\} \\
&\qquad\qquad \le \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) - h_{C(\varrho)t}(t) \text{ túl nagy}\}.
\end{aligned}
$$

Optimalizáljuk azt, hogy „túl nagy” λ-ban,

5. A felső korlát



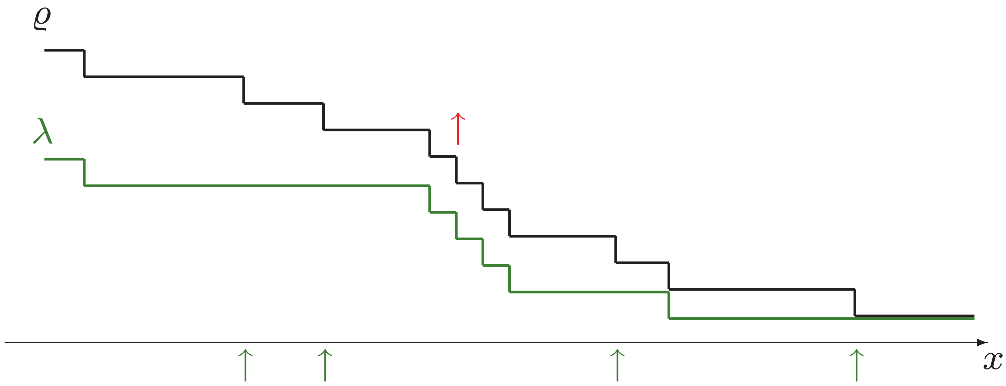
Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a $\uparrow$-kal.

$$\mathbf{P}\{Q(t) \text{ túl nagy}\}$$
$$\leq \mathbf{P}\{\text{túl sok} \uparrow \text{keresztezte } C(\varrho)t\text{-t}\}$$
$$\leq \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) - h_{C(\varrho)t}(t) \text{ túl nagy}\}.$$

Optimalizáljuk azt, hogy „túl nagy” λ-ban, használjunk egy Csebisev-egyenlőtlenséget, és találjunk kapcsolatot **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ és **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ között.

$$\mathbf{P}\{Q(t) - C(\varrho)t \geq u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))$$

5. A felső korlát



Kapcsoljuk össze $Q(t)$-t a ↑-kal.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Q(t) \text{ túl nagy}\} &\\ &\le \mathbf{P}\{\text{túl sok} \uparrow \text{keresztezte } C(\varrho)t\text{-t}\}\\ &\le \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) - h_{C(\varrho)t}(t) \text{ túl nagy}\}.\end{aligned}$$

Optimalizáljuk azt, hogy „túl nagy” λ-ban, használjunk egy Csebisev-egyenlőtlenséget, és találjunk kapcsolatot **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ és **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ között.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Q(t) - C(\varrho)t \ge u\} &\le c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))\\ &= c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - C(\varrho)t|.\end{aligned}$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Ezért

$$E = \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\}\,\mathrm{d}u$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \le c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Ezért

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\}\, \mathrm{d}u \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v \end{aligned}$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Ezért

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\}\, \mathrm{d}u \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v \\ &\leq E \int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v + \frac{1}{2}E \end{aligned}$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \le c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Ezért

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\}\,\mathrm{d}u \\ &= E\int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\,\mathrm{d}v \\ &\le E\int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}E \\ &\le c \cdot \frac{t^2}{E^2} + \frac{1}{2}E \end{aligned}$$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \le c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Ezért

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\}\, \mathrm{d}u \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v \\ &\le E \int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v + \frac{1}{2}E \\ &\le c \cdot \frac{t^2}{E^2} + \frac{1}{2}E, \end{aligned}$$

azaz $E^3 \le c \cdot t^2$

Legyen

$$\widetilde{Q}(t) := Q(t) - C(\varrho)t, \qquad E := \mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|.$$

Az előző oldalról (egy hasonló alsó eltérés egyenlőtlenséggel):

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\} \le c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

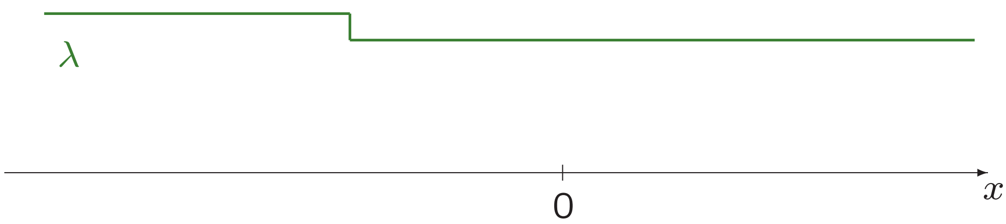
Ezért

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > u\}\, \mathrm{d}u \\
&= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v \\
&\le E \int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\widetilde{Q}(t)| > vE\}\, \mathrm{d}v + \frac{1}{2}E \\
&\le c \cdot \frac{t^2}{E^2} + \frac{1}{2}E,
\end{aligned}$$

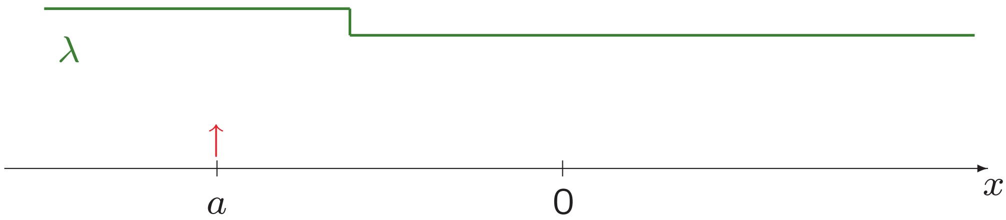
azaz $E^3 \le c \cdot t^2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t)) &= \text{konst.} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - C(\varrho)t| \\
&= \text{konst.} \cdot E \\
&\le c \cdot t^{2/3}.
\end{aligned}$$

6. Az alsó korlát

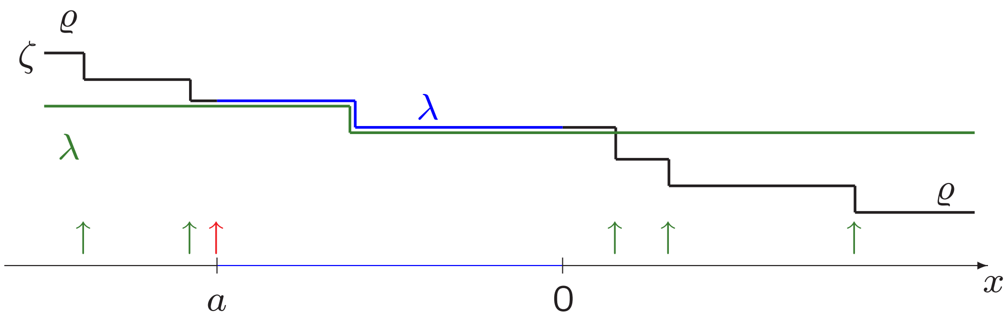


6. Az alsó korlát



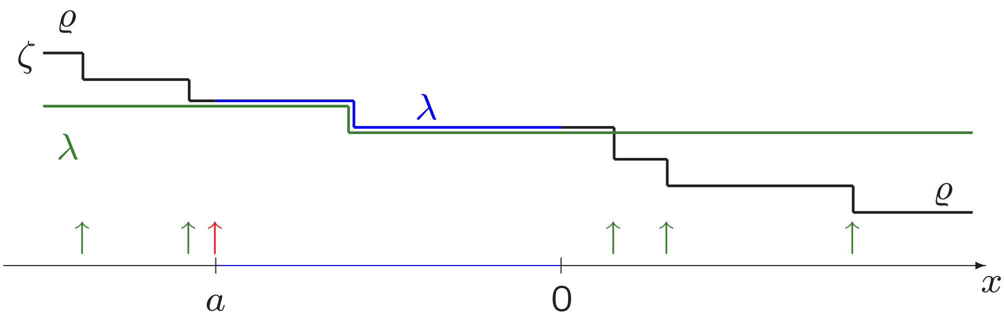
Legyen $Q^a(0) = a < 0$.

6. Az alsó korlát



Legyen $Q^a(0) = a < 0$.

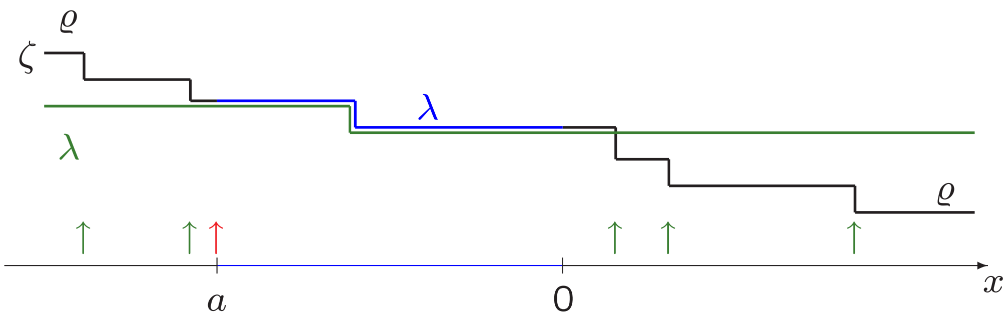
6. Az alsó korlát



Legyen $Q^a(0) = a < 0$. Ha $Q^a(t) \leq C(\varrho)t$, akkor a $\uparrow$-k nem keresztezték a $C(\varrho)t$ ablakot balról jobbra:

$$\mathbf{P}\{Q^a(t) \leq C(\varrho)t\} \leq \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

6. Az alsó korlát



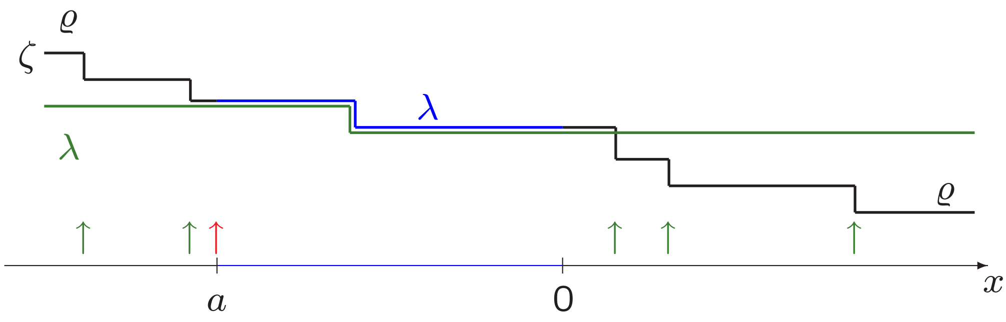
Legyen $Q^a(0) = a < 0$. Ha $Q^a(t) \leq C(\varrho)t$, akkor a $\uparrow$-k nem keresztezték a $C(\varrho)t$ ablakot balról jobbra:

$$\mathbf{P}\{Q^a(t) \leq C(\varrho)t\} \leq \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

Tehát:

$$1 \leq \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

6. Az alsó korlát



Legyen $Q^a(0) = a < 0$. Ha $Q^a(t) \le C(\varrho)t$, akkor a $\uparrow$-k nem keresztezték a $C(\varrho)t$ ablakot balról jobbra:

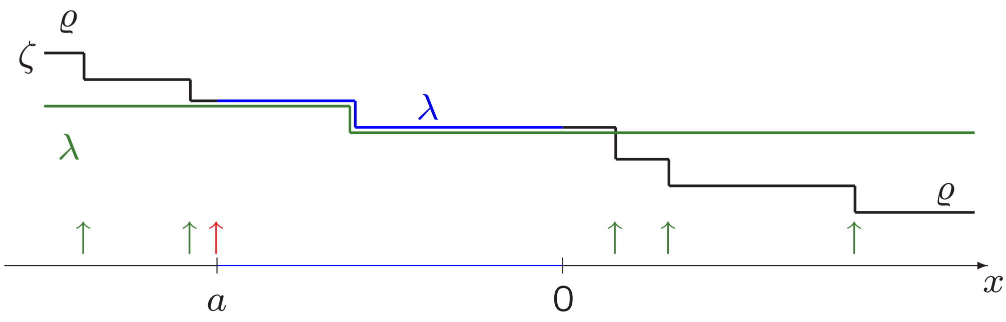
$$\mathbf{P}\{Q^a(t) \le C(\varrho)t\} \le \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

Tehát:

$$1 \le \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\rightsquigarrow$ Állítsuk be a-t úgy, hogy $\mathbf{E}(Q^a(t)) < C(\varrho)t$,

6. Az alsó korlát



Legyen $Q^a(0) = a < 0$. Ha $Q^a(t) \leq C(\varrho)t$, akkor a $\uparrow$-k nem keresztezték a $C(\varrho)t$ ablakot balról jobbra:

$$\mathbf{P}\{Q^a(t) \leq C(\varrho)t\} \leq \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

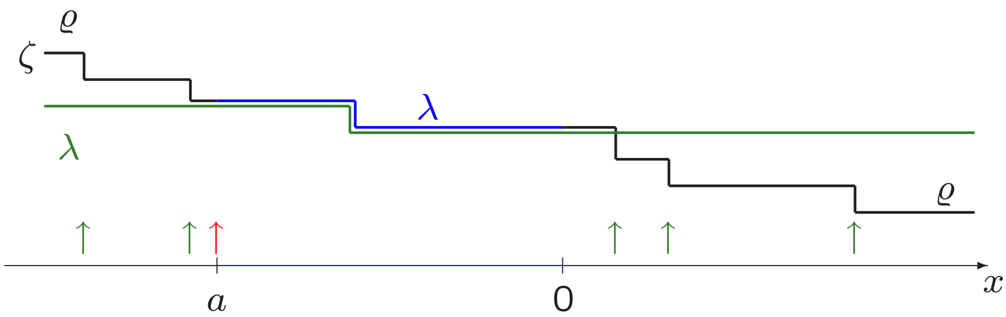
Tehát:

$$1 \leq \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\leadsto$ Állítsuk be a-t úgy, hogy $\mathbf{E}(Q^a(t)) < C(\varrho)t$,

$\leadsto$ $\mathbf{E}(h_{C(\varrho)t}(t)) - \mathbf{E}(h_{C(\varrho)t}(t)) \sim t(\varrho - \lambda)^2$ lenne, ha ζ Bernoulli(ϱ) eloszlású lenne.

6. Az alsó korlát



Legyen $Q^a(0) = a < 0$. Ha $Q^a(t) \le C(\varrho)t$, akkor a $\uparrow$-k nem keresztezték a $C(\varrho)t$ ablakot balról jobbra:

$$\mathbf{P}\{Q^a(t) \le C(\varrho)t\} \le \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

Tehát:

$$1 \le \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\rightsquigarrow$ Állítsuk be a-t úgy, hogy $\mathbf{E}(Q^a(t)) < C(\varrho)t$,

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{E}(h_{C(\varrho)t}(t)) - \mathbf{E}(h_{C(\varrho)t}(t)) \sim t(\varrho - \lambda)^2$ lenne, ha ζ Bernoulli(ϱ) eloszlású lenne. Ehelyett $\mathbf{E}(h_{C(\varrho)t}(t))$ kap egy ártalmatlan Radon-Nikodim szorzót.

$$1 \leq \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\Rightarrow$ Mindkét valószínűség eltérés valószínűsége.

$$1 \leq \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\Rightarrow$ Mindkét valószínűség eltérés valószínűsége.

Becsüljük az első valószínűséget Markov, a másodikkat Csebisev egyenlőtlenséggel (megint használjuk a kapcsolatot **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ és **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ között).

$$1 \leq \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\Rightarrow$ Mindkét valószínűség eltérés valószínűsége.

Becsüljük az első valószínűséget Markov, a második Csebisev egyenlőtlenséggel (megint használjuk a kapcsolatot **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ és **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ között).

A megfelelő paraméterek:

$$\varrho - \lambda \sim t^{-1/3}, \qquad a \sim -t^{2/3}.$$

$$1 \le \mathbf{P}\{Q^a(t) > C(\varrho)t\} + \mathbf{P}\{h_{C(\varrho)t}(t) < h_{C(\varrho)t}(t)\}.$$

$\Rightarrow$ Mindkét valószínűség eltérés valószínűsége.

Becsüljük az első valószínűséget Markov, a második Csebisev egyenlőtlenséggel (megint használjuk a kapcsolatot **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ és **Var**$(h_{C(\varrho)t}(t))$ között).

A megfelelő paraméterek:

$$\varrho - \lambda \sim t^{-1/3}, \qquad a \sim -t^{2/3}.$$

Ekkor

$$1 \le c_1 \cdot \frac{\mathbf{E}(|\widetilde{Q^a}(t)|)}{t^{2/3}} + c_2 \cdot \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}},$$

$$1 \le c \cdot \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}}.$$

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^1} \longleftrightarrow \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^2}$$

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^2} \arrow[d] & \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^1} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^2}
\end{tikzcd}$$

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{3-\varepsilon}} \arrow[d] & \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{2}} \arrow[d] & \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{1}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^{2}}
\end{tikzcd}
$$

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{4}\,? \arrow[d, dotted] & \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{3-\varepsilon}} \arrow[d] & \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{2}} \arrow[d] & \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{1}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^{2}}
\end{tikzcd}
$$

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{4}? \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^{5}? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{3-\varepsilon}} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^{4}? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{2}} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^{3}? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{1}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^{2}}
\end{tikzcd}
$$

7. Nyitott kérdések

→

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^4? \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^5? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{3-\varepsilon}} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^4? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^2} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^3? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^1} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^2}
\end{tikzcd}
$$

→ Mi a limesz $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} = ?$ (Nehéz.)

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^4? \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^5? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{3-\varepsilon}} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^4? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^2} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^3? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^1} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^2}
\end{tikzcd}
$$

$\longrightarrow$ Mi a limesz $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} = ?$ (Nehéz.)

$\longrightarrow$ Más modellek (zero range, kőműves, ...)?

7. Nyitott kérdések

$\longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^4? \arrow[d, dotted] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^5? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^{3-\varepsilon}} \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^4? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^2} \arrow[d] & \mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^3? \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\mathbf{E}|\widetilde{Q}(t)|^1} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{E}|\widetilde{h}_{C(\varrho)t}(t)|^2}
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ Mi a limesz $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{Var}(h_{C(\varrho)t}(t))}{t^{2/3}} = ?$ (Nehéz.)

$\longrightarrow$ Más modellek (zero range, kőműves, ...)?

Köszönöm a figyelmet.