

# Sztochasztikus modellek (ön-)kölcsonhatással – nehéz kérdések és elegáns válaszok

Izelítő mindabból, amit Tóth Bálinttól kaptunk

Márton Balázs

BME TTK Sztochasztika Tsz.

Szele Tibor Emlékérem, 2010  
Bolyai János Matematikai Társulat

Életrajz

Perkoláció

Miből lesz a Brown-mozgás?

Bolyongások

Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Részecskerendszerek: sok kőműves

Részecskerendszerek: sok, mozgó kőműves

## Tóth Bálint hivatalos pályafutása, tömören

- Fizikus diploma, 1980, Bukarest;
- A Rényi Intézet munkatársa, 1982 - 1998;
- Matematikus PhD, 1988, Rényi Intézet (**Szász Domokos**);
- Vendégkutató, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1989 - 1991;
- Tsz.vezető professzor, BME TTK Sztochasztika Tsz, 1998 -, intézetigazgató 2005 - 2009.

## Tóth Bálint hivatalos pályafutása, tömören

- Fizikus diploma, 1980, Bukarest;
- A Rényi Intézet munkatársa, 1982 - 1998;
- Matematikus PhD, 1988, Rényi Intézet (**Szász Domokos**);
- Vendégkutató, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1989 - 1991;
- Tsz.vezető professzor, BME TTK Sztochasztika Tsz, 1998 -, intézetigazgató 2005 - 2009.
- Vezető valószínűségszámítási folyóiratok (fő)szerkesztője;

## Tóth Bálint hivatalos pályafutása, tömören

- Fizikus diploma, 1980, Bukarest;
- A Rényi Intézet munkatársa, 1982 - 1998;
- Matematikus PhD, 1988, Rényi Intézet (**Szász Domokos**);
- Vendégkutató, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1989 - 1991;
- Tsz.vezető professzor, BME TTK Sztochasztika Tsz, 1998 -, intézetigazgató 2005 - 2009.
  
- Vezető valószínűségszámítási folyóiratok (fő)szerkesztője;
- több rangos díj kitüntetettje (MTA, állami kitüntetések);

## Tóth Bálint hivatalos pályafutása, tömören

- Fizikus diploma, 1980, Bukarest;
- A Rényi Intézet munkatársa, 1982 - 1998;
- Matematikus PhD, 1988, Rényi Intézet (**Szász Domokos**);
- Vendégkutató, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1989 - 1991;
- Tsz.vezető professzor, BME TTK Sztochasztika Tsz, 1998 -, intézetigazgató 2005 - 2009.
  
- Vezető valószínűségszámítási folyóiratok (fő)szerkesztője;
- több rangos díj kitüntetettje (MTA, állami kitüntetések);
- hazai és nemzetközi matematikai társulatok tagja;

## Tóth Bálint hivatalos pályafutása, tömören

- Fizikus diploma, 1980, Bukarest;
- A Rényi Intézet munkatársa, 1982 - 1998;
- Matematikus PhD, 1988, Rényi Intézet (**Szász Domokos**);
- Vendégkutató, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1989 - 1991;
- Tsz.vezető professzor, BME TTK Sztochasztika Tsz, 1998 -, intézetigazgató 2005 - 2009.
  
- Vezető valószínűségszámítási folyóiratok (fő)szerkesztője;
- több rangos díj kitüntetettje (MTA, állami kitüntetések);
- hazai és nemzetközi matematikai társulatok tagja;
- tucatnyi konferencia szervezője, hazai és nemzetközi tudományos bizottságok tagja;

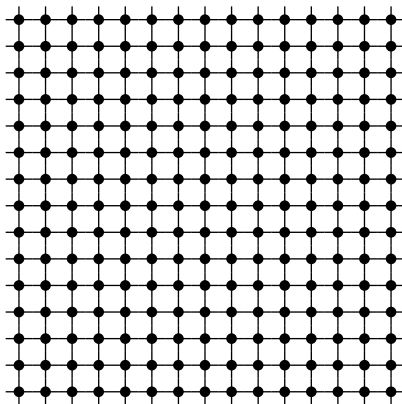
## Tóth Bálint hivatalos pályafutása, tömören

- Fizikus diploma, 1980, Bukarest;
- A Rényi Intézet munkatársa, 1982 - 1998;
- Matematikus PhD, 1988, Rényi Intézet (**Szász Domokos**);
- Vendégkutató, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1989 - 1991;
- Tsz.vezető professzor, BME TTK Sztochasztika Tsz, 1998 -, intézetigazgató 2005 - 2009.
  
- Vezető valószínűségszámítási folyóiratok (fő)szerkesztője;
- több rangos díj kitüntetettje (MTA, állami kitüntetések);
- hazai és nemzetközi matematikai társulatok tagja;
- tucatnyi konferencia szervezője, hazai és nemzetközi tudományos bizottságok tagja;
- és szakmai meghívások során bejárta a fél világot.



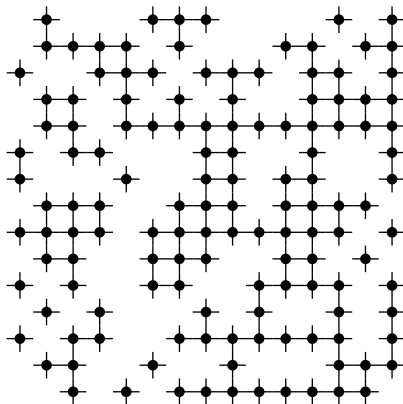
# Egy perkolációs világcsúcs

Csúcsperkoláció a négyzetrácson:



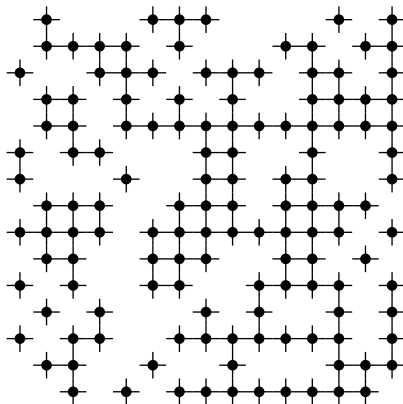
# Egy perkolációs világcsúcs

Csúcsperkoláció a négyzetrácson:



# Egy perkolációs világcsúcs

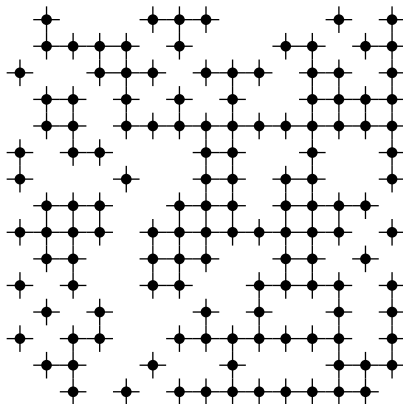
Csúcsperkoláció a négyzetrácson:



Minden csúcs függetlenül  $p$  valószínűséggel járható.

# Egy perkolációs világcsúcs

Csúcsperkoláció a négyzetrácson:



Minden csúcs függetlenül  $p$  valószínűséggel járható.  
Lesz-e út az origóból a végtelenbe?

## Egy perkolációs világcsúcs

Válasz: ha  $p > p_c$ , akkor pozitív valószínűséggel lesz.

## Egy perkolációs világcsúcs

Válasz: ha  $p > p_c$ , akkor pozitív valószínűséggel lesz.

Mennyi  $p_c$ ?

Nehéz kérdés (**csúcsperkoláció**).

## Egy perkolációs világcsúcs

Válasz: ha  $p > p_c$ , akkor pozitív valószínűséggel lesz.

Mennyi  $p_c$ ?

Nehéz kérdés (**csúcsperkoláció**).

Bálint, 1985:

$p_c > 0.503478$ . Elegáns geometriai konstrukció + valószínűségi csatolás.

## Egy perkolációs világcsúcs

Válasz: ha  $p > p_c$ , akkor pozitív valószínűséggel lesz.

Mennyi  $p_c$ ?

Nehéz kérdés (**csúcsperkoláció**).

Bálint, 1985:

$p_c > 0.503478$ . Elegáns geometriai konstrukció + valószínűségi csatolás.

Egy ideig világcsúcs volt. Igazság:  $p_c \simeq 0.592746$ .



## Egy perkolációs világcsúcs

Válasz: ha  $p > p_c$ , akkor pozitív valószínűséggel lesz.

Mennyi  $p_c$ ?

Nehéz kérdés (**csúcsperkoláció**).

Bálint, 1985:

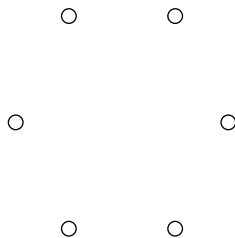
$p_c > 0.503478$ . Elegáns geometriai konstrukció + valószínűségi csatolás.

Egy ideig világcsúcs volt. Igazság:  $p_c \simeq 0.592746$ .

További perkolációhoz közeli eredmények Jacob van den Berggel...

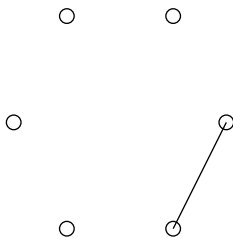
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



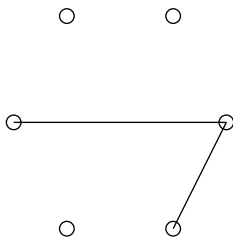
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



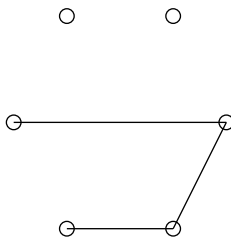
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



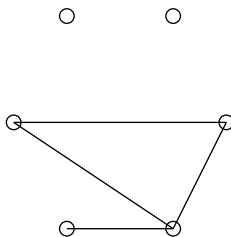
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



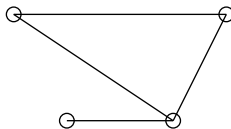
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



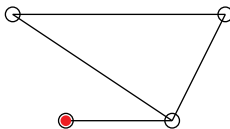
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



# Egy erdőtűz modell

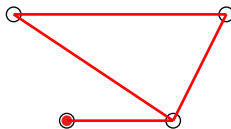
Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:





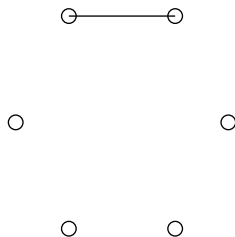
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



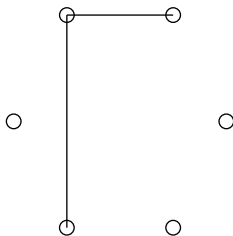
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



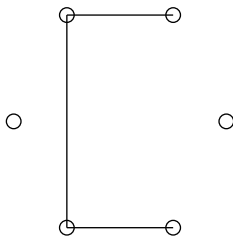
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



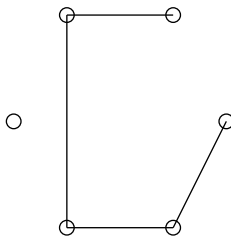
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



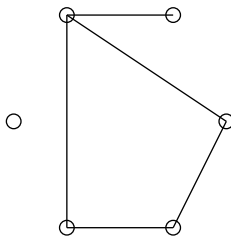
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



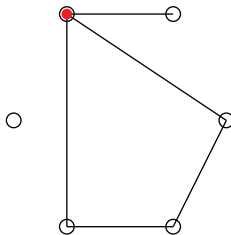
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



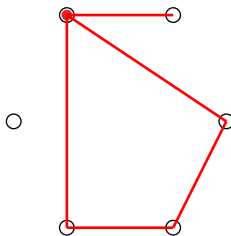
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



# Egy erdőtűz modell

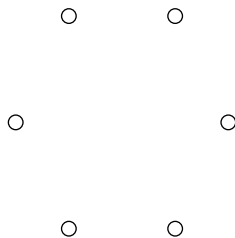
Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:





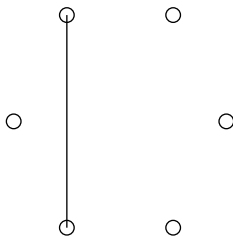
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



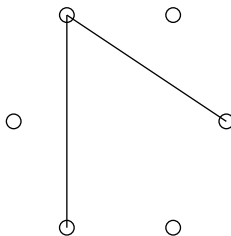
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



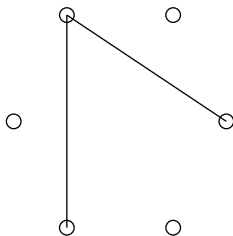
# Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



## Egy erdőtűz modell

Dinamikus Erdős-Rényi gráf + villámok:



**Ráth Balázs, Bálint:** Önszerveződő kritikusság  
(*komponens-méreték lecsengése hatványrendű*),  
összeolvadási egyenletek.

## Véletlen gráfnövekedési modellek

Újabb és újabb csúcsok csatlakoznak egy fához, hogy melyik csúcsába, az a fokszámtól függ.

## Véletlen gráfnövekedési modellek

Újabb és újabb csúcsok csatlakoznak egy fához, hogy melyik csúcsába, az a fokszámtól függ.

**Fokszámban lineáris a súlyozás:** sokan vizsgálták.

## Véletlen gráfnövekedési modellek

Újabb és újabb csúcsok csatlakoznak egy fához, hogy melyik csúcsába, az a fokszámtól függ.

**Fokszámban lineáris a súlyozás:** sokan vizsgálták.

**Rudas Anna, Bálint, Valkó Benedek:** aszimptotikus fokszám eloszlás, sokféle súlyozás esetén.

## Véletlen gráfnövekedési modellek

Újabb és újabb csúcsok csatlakoznak egy fához, hogy melyik csúcsába, az a fokszámtól függ.

**Fokszámban lineáris a súlyozás:** sokan vizsgálták.

**Rudas Anna, Bálint, Valkó Benedek:** aszimptotikus fokszám eloszlás, sokféle súlyozás esetén.

**Sőt:** aszimptotikus  $\alpha$ -eloszlás is egy véletlenül választott csúcsból nézve.



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

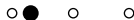
# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

Adjunk a piciknek Poisson folyamat szerinti kezdő helyet, és független Gauss kezdősebességet (Maxwell eloszlás).

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Egy nehezebb részecske sok könnyebb között.

Ahogy Robert Brown is látta...

Adjunk a piciknek Poisson folyamat szerinti kezdő helyet, és független Gauss kezdősebességet (Maxwell eloszlás).

Kijön-e a Brown mozgás limeszben?



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.



# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

Szász Domokos, Tóth Bálint (1986): Szórás megfelelően skálázódik (diffúzív viselkedés).

# Miből lesz a Brown-mozgás?



Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

**Szász Domokos, Tóth Bálint (1986):** Szórás megfelelően skálázódik (diffúzív viselkedés).

**Szász Domokos, Tóth Bálint (1987):** Ha a részecskénk tömegét is skálázzuk, ismert sztochasztikus diff.egyenletek megoldásai jönnek ki.



# Miből lesz a Brown-mozgás?



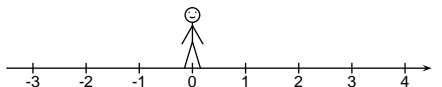
Nehézség: ismételt ütközések  $\leftrightarrow$  Markovitás.

**Szász Domokos, Tóth Bálint (1986):** Szórás megfelelően skálázódik (diffúzív viselkedés).

**Szász Domokos, Tóth Bálint (1987):** Ha a részecskénk tömegét is skálázzuk, ismert sztochasztikus diff.egyenletek megoldásai jönnek ki.

**Bálint Péter, Tóth Imre Péter, Tóth Bálint (2006):** Ha a részecskénk tömege  $\rightarrow 0$ , egy effektív potenciált fog közvetíteni a két szomszédos  $\circ$  között, és a probléma így vizsgálható.

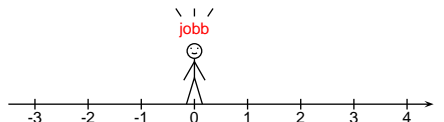
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

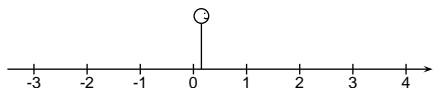
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

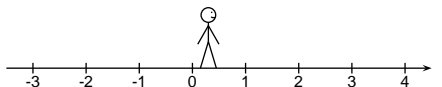
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

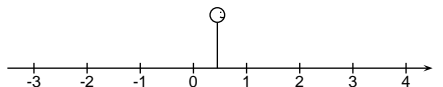
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

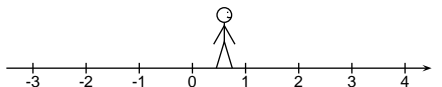
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

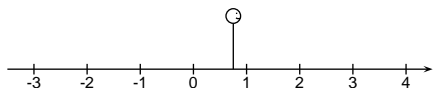
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

# Bolyongások

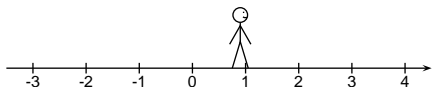


Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.



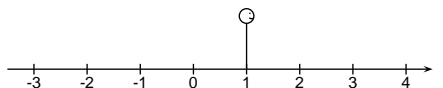
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

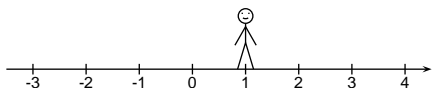
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

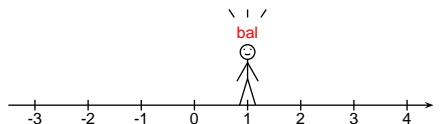
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

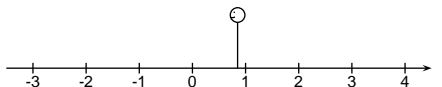
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy **“bal”** és egy **“jobb”** független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

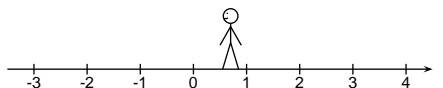
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

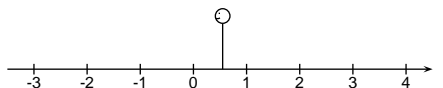
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

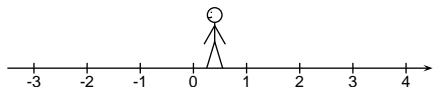
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

# Bolyongások

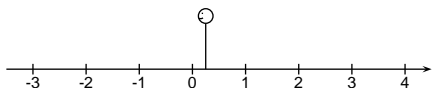


Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.



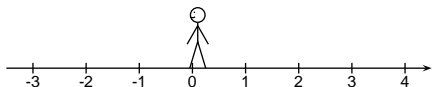
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

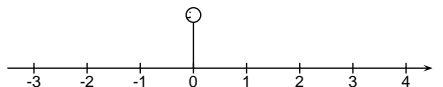
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

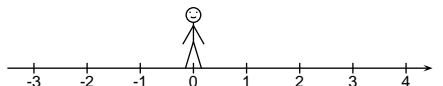
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

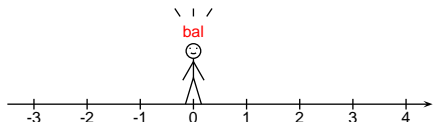
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

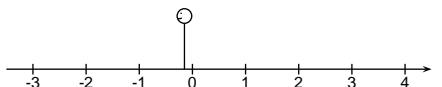
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

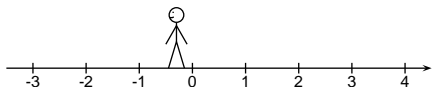
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

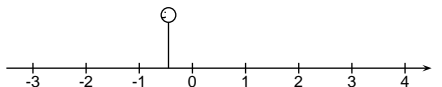
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

# Bolyongások

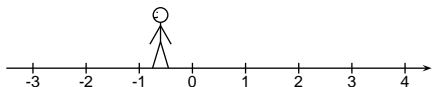


Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.



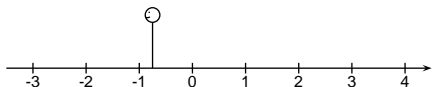
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

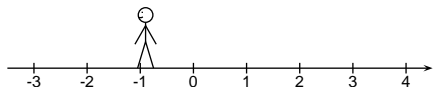
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

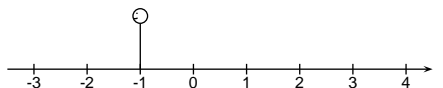
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

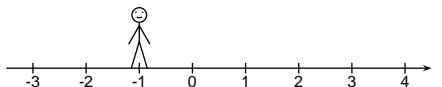
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

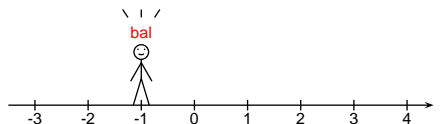
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

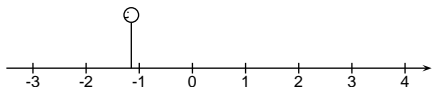
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

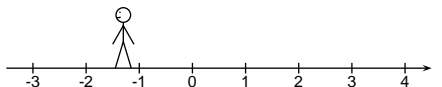
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

# Bolyongások

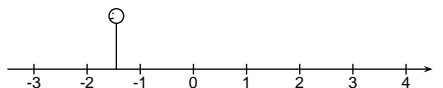


Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.



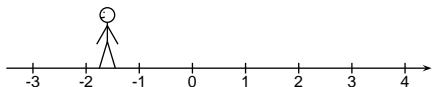
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

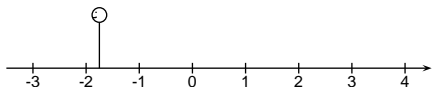
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

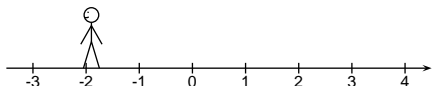
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

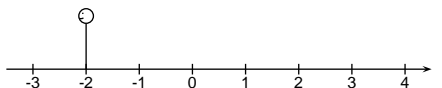
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

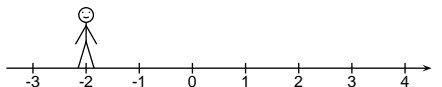
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vektor.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

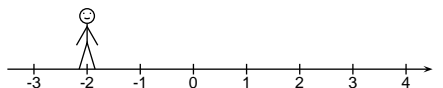
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép.

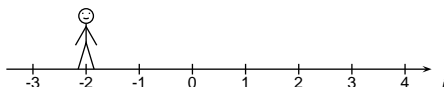
# Bolyongások



Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép. (**Gyorsan.**)

# Bolyongások



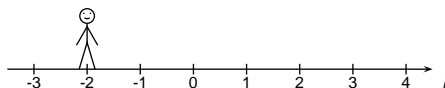
Bolyongónak van a zsebében egy “**bal**” és egy “**jobb**” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép. (**Gyorsan.**)

↪ *A bolyongó 1 rátával lép balra és 1 rátával lép jobbra.*



# Bolyongások



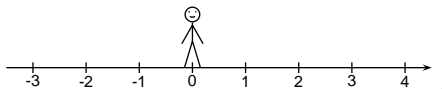
Bolyongónak van a zsebében egy “bal” és egy “jobb” független, Exponenciális(1) eloszlású véletlen vekker.

Amikor az óra csörög, a bolyongó lép. (Gyorsan.)

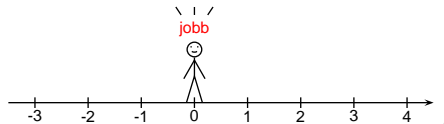
↪ *A bolyongó 1 rátával lép balra és 1 rátával lép jobbra.*

Mi lehet ebben olyan nehéz?

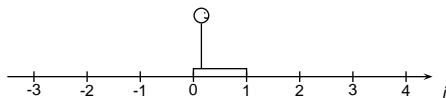
# Bolyongások



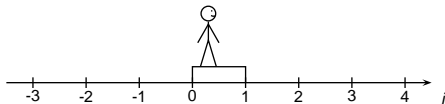
# Bolyongások



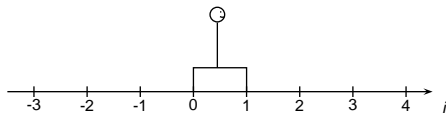
# Bolyongások



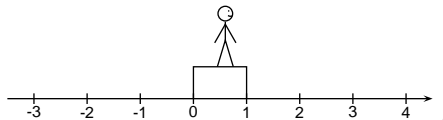
# Bolyongások



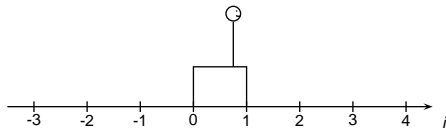
# Bolyongások



# Bolyongások

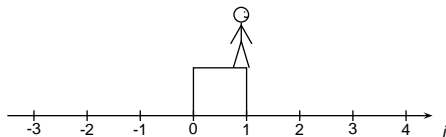


# Bolyongások

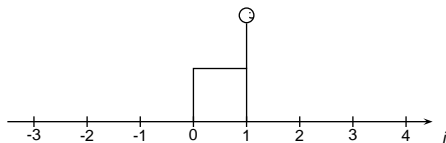




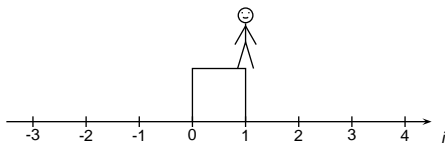
# Bolyongások



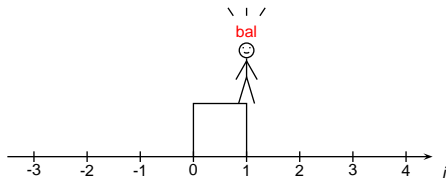
# Bolyongások



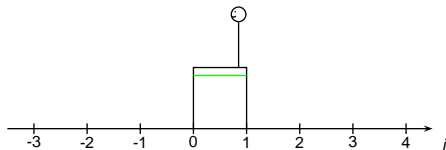
# Bolyongások



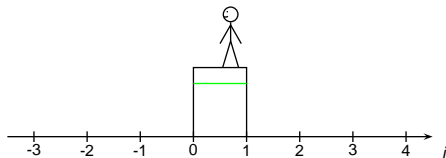
# Bolyongások



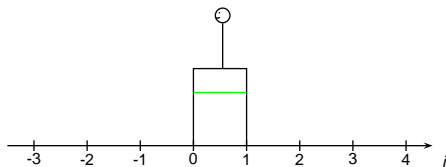
# Bolyongások



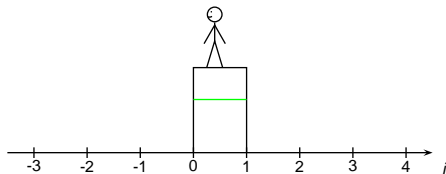
# Bolyongások



# Bolyongások

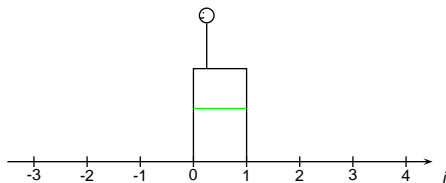


# Bolyongások

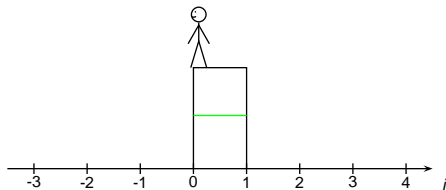




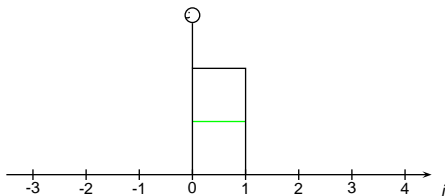
# Bolyongások



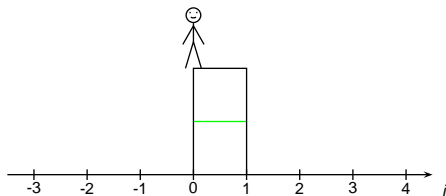
# Bolyongások



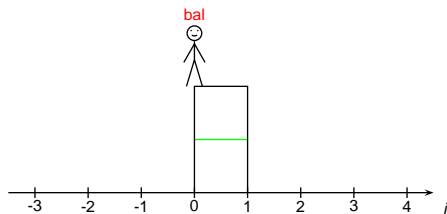
# Bolyongások



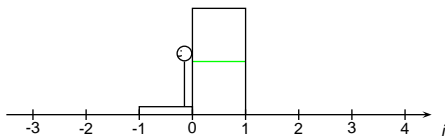
# Bolyongások



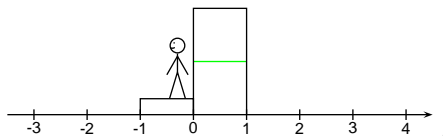
# Bolyongások



# Bolyongások



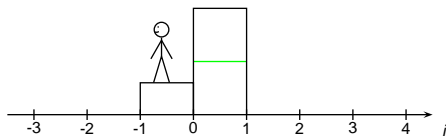
# Bolyongások



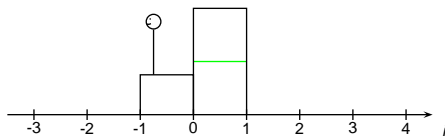




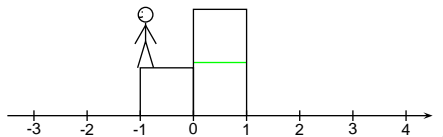
# Bolyongások



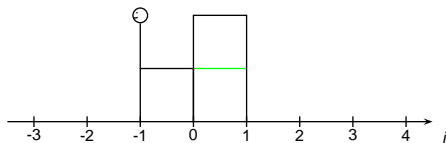
# Bolyongások



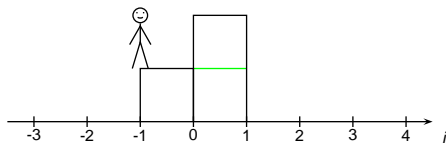
# Bolyongások



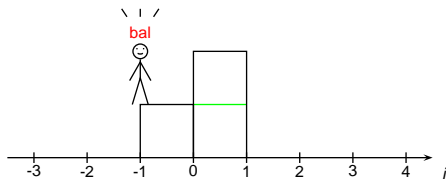
# Bolyongások



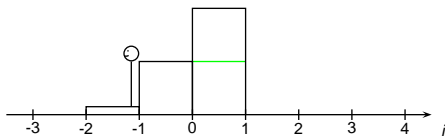
# Bolyongások



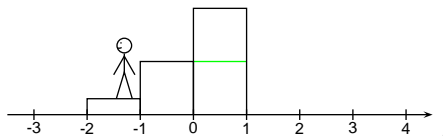
# Bolyongások



# Bolyongások

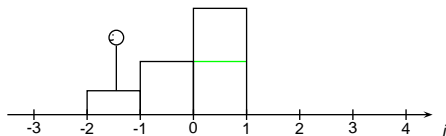


# Bolyongások

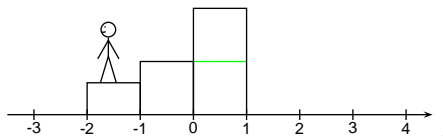




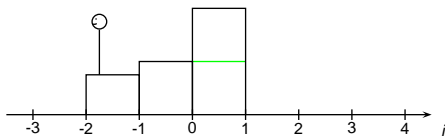
# Bolyongások



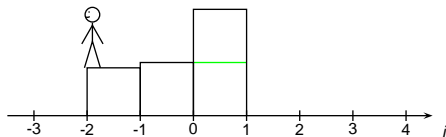
# Bolyongások



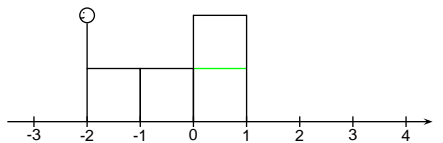
# Bolyongások



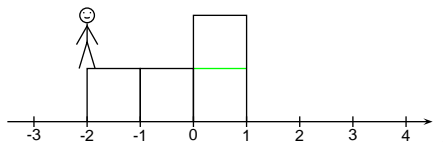
# Bolyongások



# Bolyongások

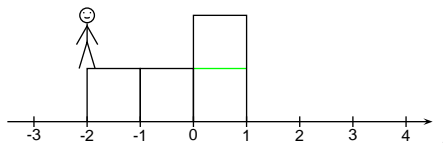


# Bolyongások



Falmagasság = *lokális idő az éleken.*

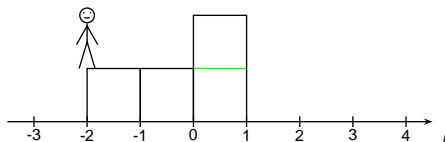
# Bolyongások



Falmagasság = *lokális idő az éleken.*

Erdős Pál, Révész Pál: hány maximuma van a fálnak?

# Bolyongások



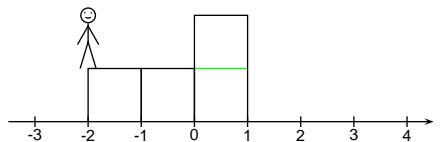
Falmagasság = *lokális idő az éleken.*

Erdős Pál, Révész Pál: hány maximuma van a fálnak?

Tóth Bálint: 1 vsz. gel csak véges sokszor lesz négy vagy több maximum.



# Bolyongások



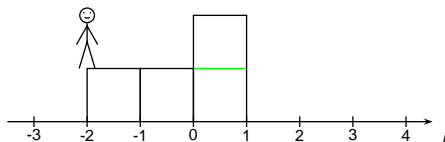
Falmagasság = *lokális idő az éleken.*

Erdős Pál, Révész Pál: hány maximuma van a falnak?

Tóth Bálint: 1 vsz. gel csak véges sokszor lesz négy vagy több maximum.

(A kérdés igazából csúcsok lokális idejéről szólt, Bálint később ezt is megválaszolta.)

# Bolyongások



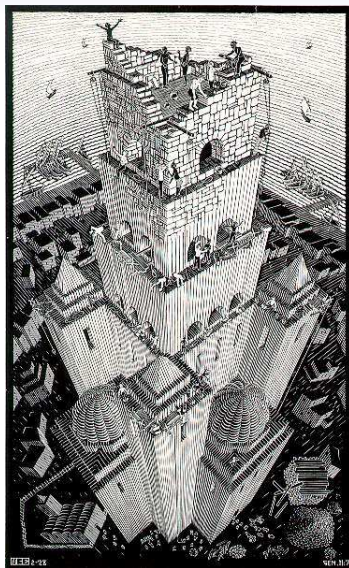
Falmagasság = *lokális idő az éleken.*

Erdős Pál, Révész Pál: hány maximuma van a falnak?

Tóth Bálint: 1 vsz.gel csak véges sokszor lesz négy vagy több maximum.

(A kérdés igazából csúcsok lokális idejéről szólt, Bálint később ezt is megválaszolta.)

Módszer: Knight 1963: állítsuk meg a falat amikor egy adott helyen elér egy adott magasságot. Ekkor a fal maga egy Markov lánc (idő helyett  $i$  a változó).



# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

Igazi kőműves nem akárhogy rakja a téglát: hogy merre lép és rak, attól függ, milyen magas a fal.

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

Igazi kőműves nem akárhogy rakja a téglát: hogy merre lép és rak, attól függ, milyen magas a fal.

↪ Függjön a lépés rátája a két szomszédos téglaoszlop magasságától.

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

Igazi kőműves nem akárhogy rakja a téglát: hogy merre lép és rak, attól függ, milyen magas a fal.

↪ Függjön a lépés rátája a két szomszédos téglaoszlop magasságától.

Egy bolyongás, aki kölcsönhat **a saját múltjával**.

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

Igazi kőműves nem akárhogy rakja a téglát: hogy merre lép és rak, attól függ, milyen magas a fal.

↪ Függjön a lépés rátája a két szomszédos téglaoszlop magasságától.

Egy bolyongás, aki kölcsönhat **a saját múltjával**.

Lehet **öntaszító**, **önvonzó**, erősebben vagy gyengébben.



# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

Igazi kőműves nem akárhogy rakja a téglát: hogy merre lép és rak, attól függ, milyen magas a fal.

↪ Függjön a lépés rátája a két szomszédos téglaoszlop magasságától.

Egy bolyongás, aki kölcsönhat **a saját múltjával**.

Lehet **öntaszító**, **önvonzó**, erősebben vagy gyengébben.

**Bálint**: Mindezekről függően különböző egzotikus skálázások, pl.  $X_n/n^{2/3}$ .

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Bolyongó építi a falat: *vak kőműves*.

Igazi kőműves nem akárhogy rakja a téglát: hogy merre lép és rak, attól függ, milyen magas a fal.

↔ Függjön a lépés rátája a két szomszédos téglaoszlop magasságától.

Egy bolyongás, aki kölcsönhat **a saját múltjával**.

Lehet **öntaszító**, **önvonzó**, erősebben vagy gyengébben.

**Bálint**: Mindezekről függően különböző egzotikus skálázások, pl.  $X_n/n^{2/3}$ .

**Módszer**: Ray-Knight tételek általánosítása.

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );
- $3/2$  hatványú lokális variáció (BM-nak  $2$  hatványú lenne);

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );
- $3/2$  hatványú lokális variáció (BM-nak  $2$  hatványú lenne);
- “természetesen” definiálható lokális idő;

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );
- $3/2$  hatványú lokális variáció (BM-nak  $2$  hatványú lenne);
- “természetesen” definiálható lokális idő;
- $X(t)$  **a lokális idejével együtt** egy Markov folyamat;



# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: öntaszító mozgás,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );
- $3/2$  hatványú lokális variáció (BM-nak  $2$  hatványú lenne);
- “természetesen” definiálható lokális idő;
- $X(t)$  **a lokális idejével együtt** egy Markov folyamat;
- A lokális idő lokálisan hajtja  $X(t)$ -t, formálisan

$$dX(t) = -\frac{\partial L(t, X(t))}{\partial x} dt.$$

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: *öntaszító mozgás*,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );
- $3/2$  hatványú lokális variáció (BM-nak  $2$  hatványú lenne);
- “természetesen” definiálható lokális idő;
- $X(t)$  **a lokális idejével együtt** egy Markov folyamat;
- A lokális idő lokálisan hajtja  $X(t)$ -t, formálisan

$$dX(t) = -\frac{\partial L(t, X(t))}{\partial x} dt.$$

Wendelin Werner Fields medál laudációjában ezeket az eredményeket kiemelték.

# Öntaszító, önkölcsönható bolyongások: egy kőműves

Sőt, **Bálint és Wendelin Werner**: *öntaszító mozgás*,  $X(t)$ :

- m.b. folytonos;
- $\{X(\alpha t)\}_t$  és  $\{\alpha^{2/3}X(t)\}_t$  azonos eloszlásúak ( $\alpha > 0$ );
- $3/2$  hatványú lokális variáció (BM-nak  $2$  hatványú lenne);
- “természetesen” definiálható lokális idő;
- $X(t)$  **a lokális idejével együtt** egy Markov folyamat;
- A lokális idő lokálisan hajtja  $X(t)$ -t, formálisan

$$dX(t) = -\frac{\partial L(t, X(t))}{\partial x} dt.$$

Wendelin Werner Fields medál laudációjában ezeket az eredményeket kiemelték.

**Közben:** *Brownian web*.

## Magasabb dimenzió: diffúzív eset

**Horváth Illés, Bálint, Vető Bálint:** Három vagy több dimenzióban viszont diffúzív a skálázás.

## Magasabb dimenzió: diffúzív eset

**Horváth Illés, Bálint, Vető Bálint:** Három vagy több dimenzióban viszont diffúzív a skálázás.

Ez is messze nem triviális, a híres Kipnis-Varadhan módszerek általánosítása kell hozzá.

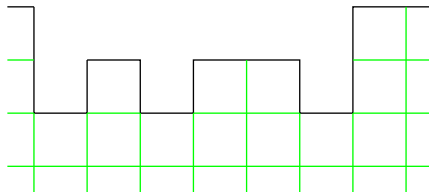
## Magasabb dimenzió: diffúzív eset

**Horváth Illés, Bálint, Vető Bálint:** Három vagy több dimenzióban viszont diffúzív a skálázás.

Ez is messze nem triviális, a híres Kipnis-Varadhan módszerek általánosítása kell hozzá.

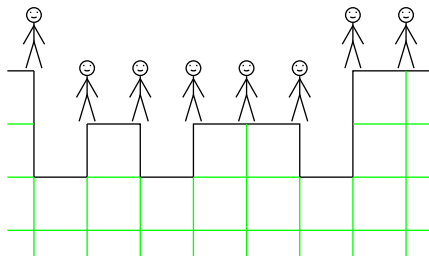
(Bálint korai cikkeiben véletlen közegű perzisztens bolyongásra már használt ehhez hasonló módszereket.)

# Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

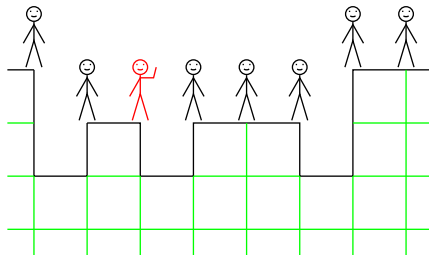
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

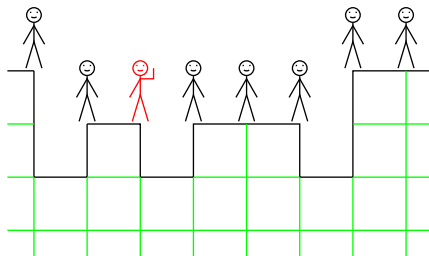


## Részecskerendszerek: sok kőműves



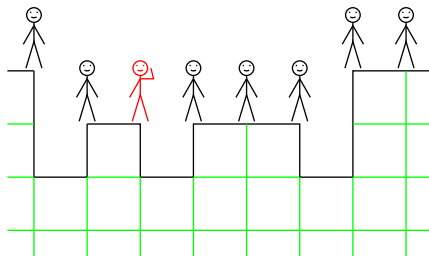
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



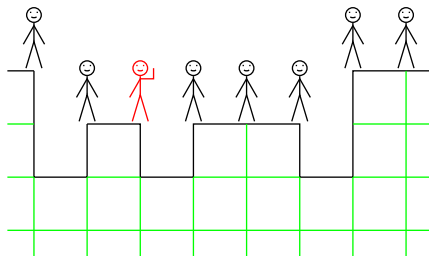
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



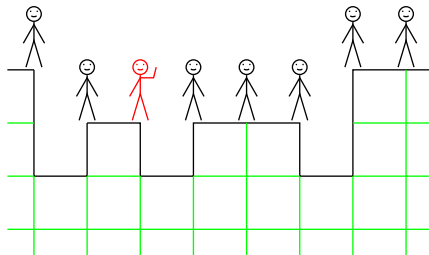
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



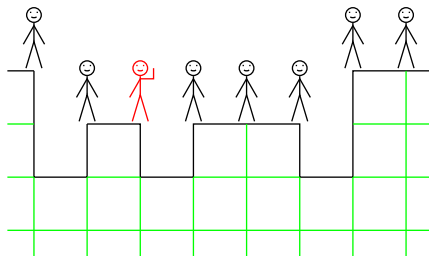
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



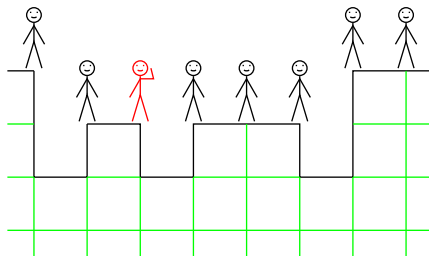
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



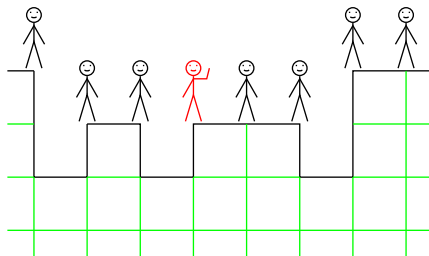
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

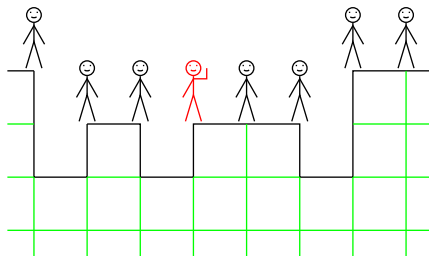
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

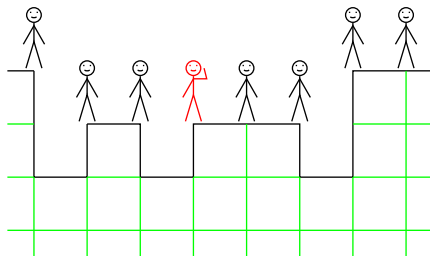


## Részecskerendszerek: sok kőműves



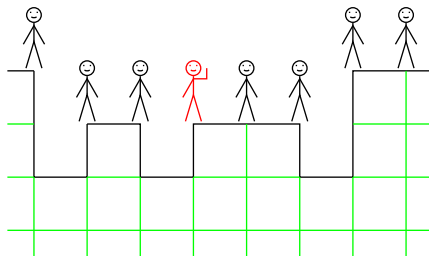
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



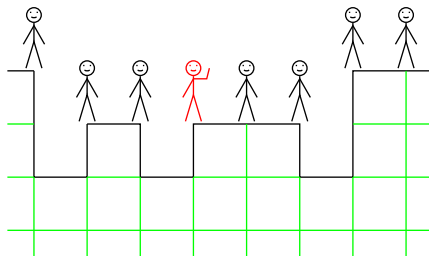
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



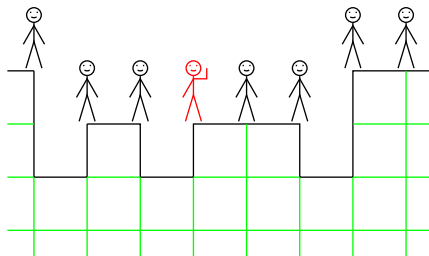
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



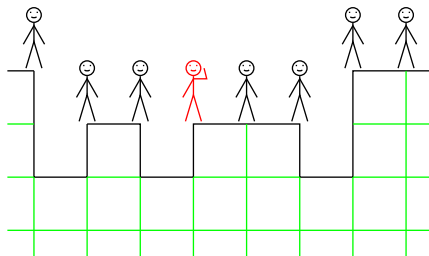
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



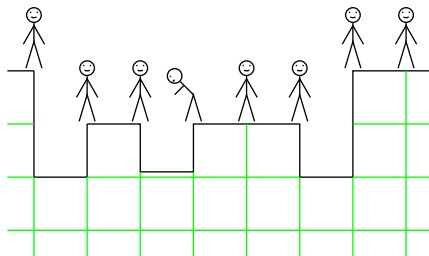
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



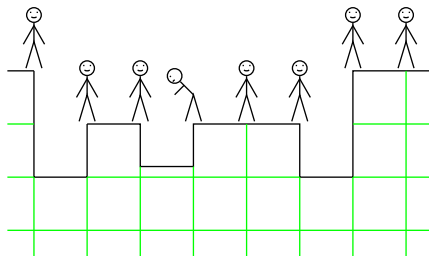
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

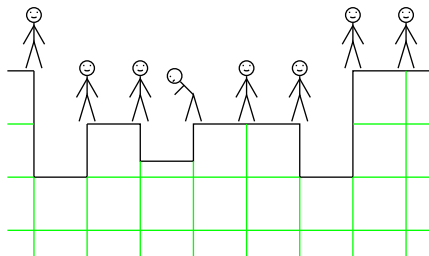
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

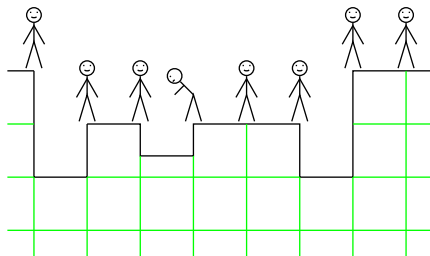


## Részecskerendszerek: sok kőműves



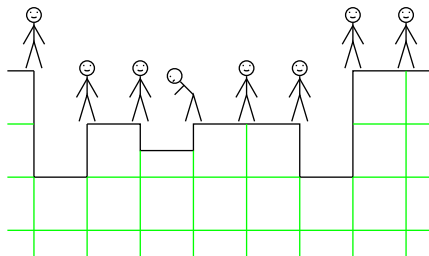
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



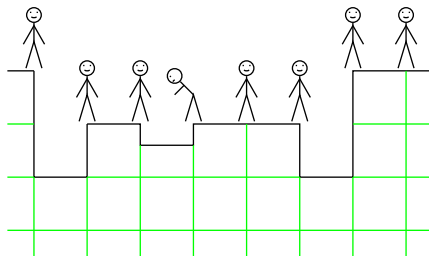
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



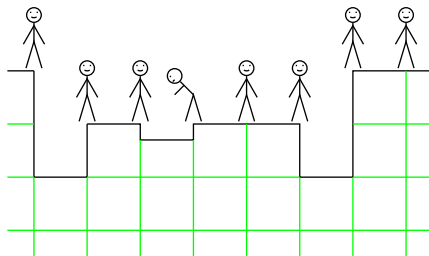
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



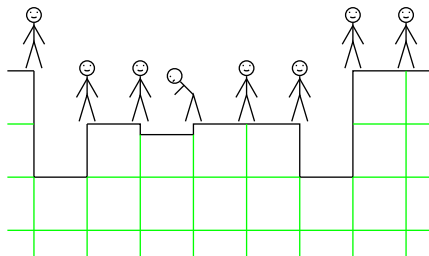
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



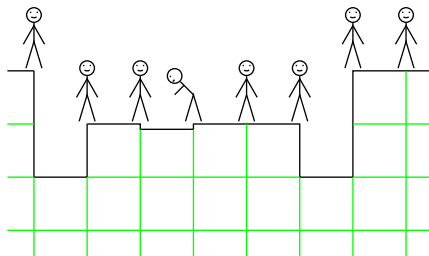
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



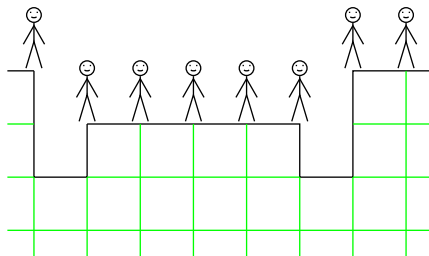
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

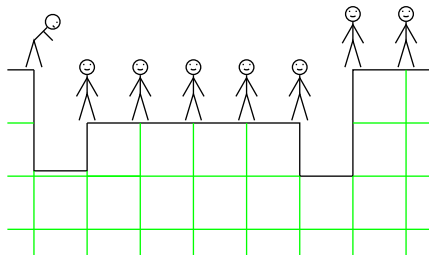
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

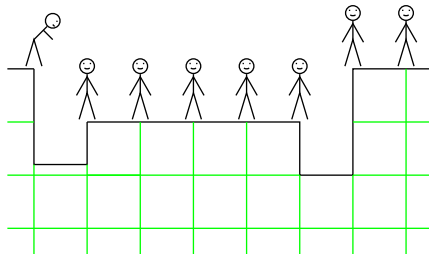


## Részecskerendszerek: sok kőműves



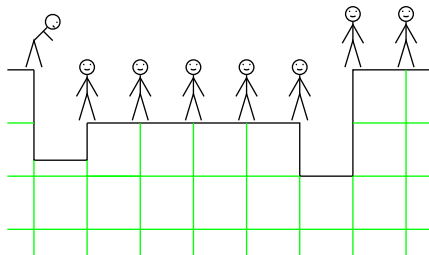
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



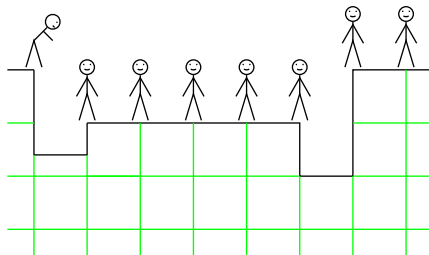
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



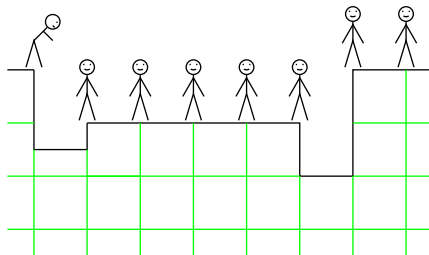
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



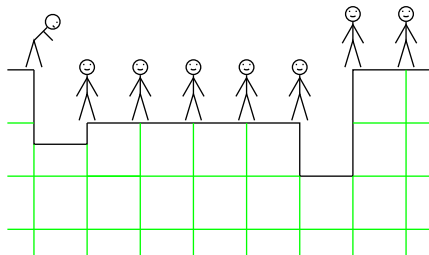
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



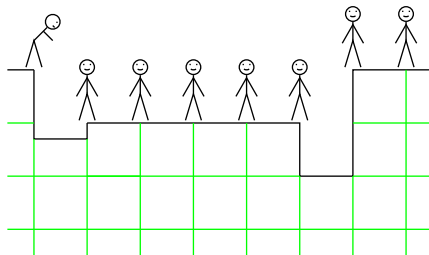
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves

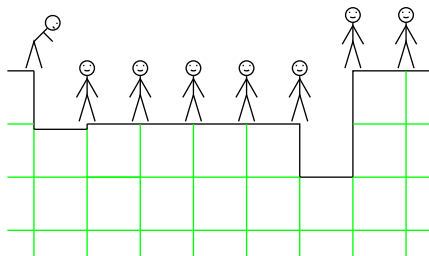


Sok kőműves, de nem lépkednek.



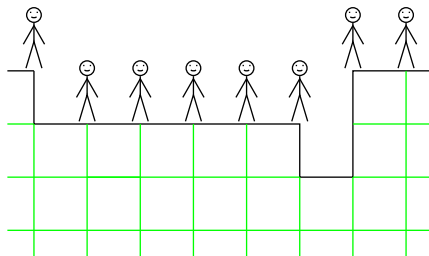


## Részecskerendszerek: sok kőműves



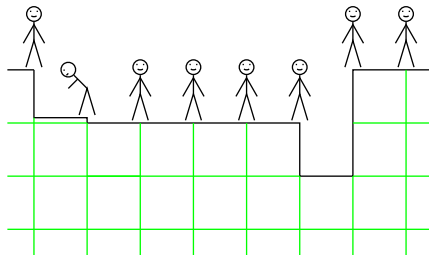
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



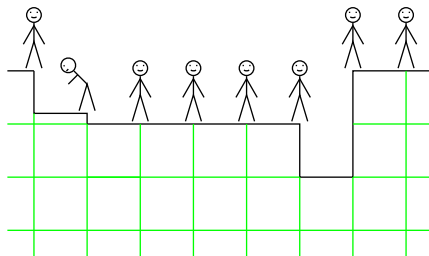
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



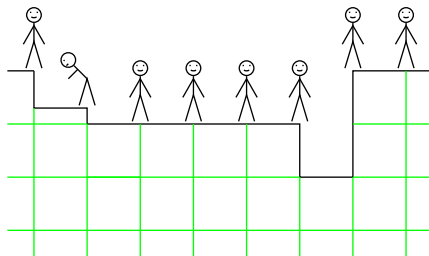
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



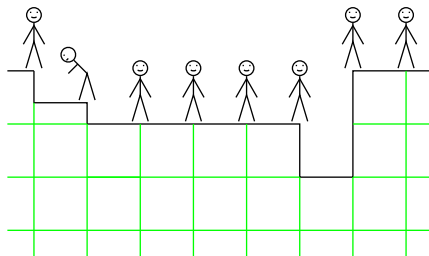
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



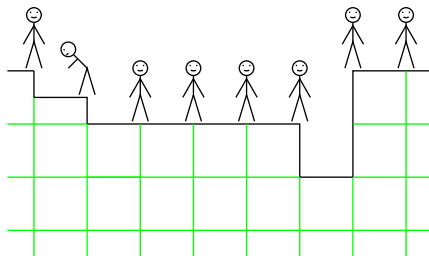
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



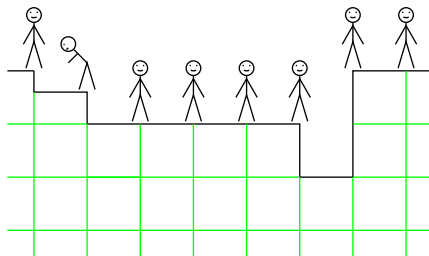
Sok kőműves, de nem lépkednek.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

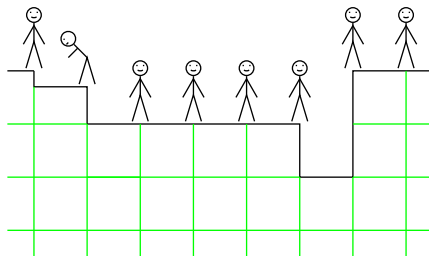
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

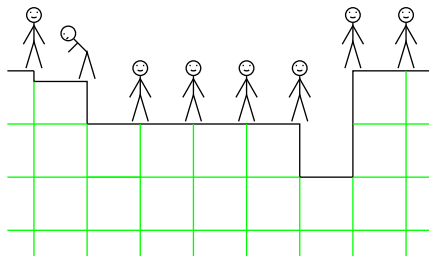


## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

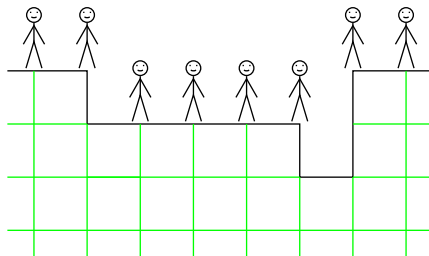
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

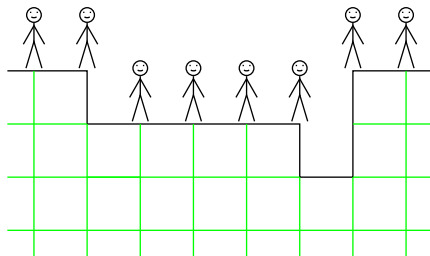


## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

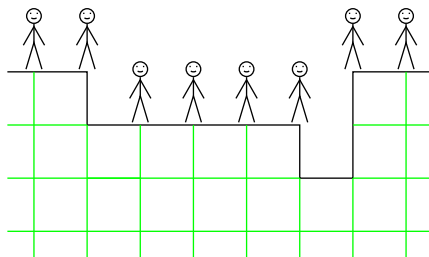
## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

Arra raknak gyorsabban téglát, amerre lokálisan alacsonyabb a fal.

## Részecskerendszerek: sok kőműves

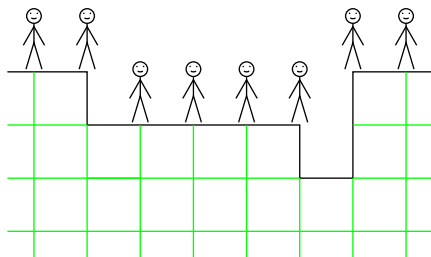


Sok kőműves, de nem lépkednek.

Arra raknak gyorsabban téglát, amerre lokálisan alacsonyabb a fal.

↪ Részecskerendszer egy megmaradó mennyiséggel.

## Részecskerendszerek: sok kőműves



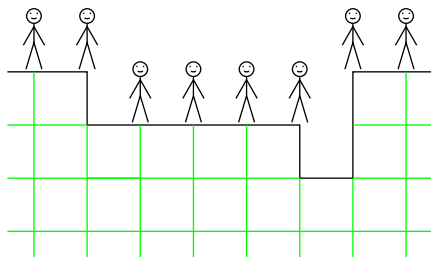
Sok kőműves, de nem lépkednek.

Arra raknak gyorsabban téglát, amerre lokálisan alacsonyabb a fal.

↪ Részecskerendszer egy megmaradó mennyiséggel.

(**Én ebből élek.** Hidrodinamika, lökéshullámok, egzotikus skálázás...)

## Részecskerendszerek: sok kőműves



Sok kőműves, de nem lépkednek.

Arra raknak gyorsabban téglát, amerre lokálisan alacsonyabb a fal.

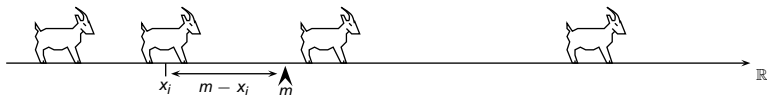
↪ Részecskerendszer egy megmaradó mennyiséggel.

(**Én ebből élek.** Hidrodinamika, lökéshullámok, egzotikus skálázás...)

**Naná, hogy  $t^{2/3}$ !**



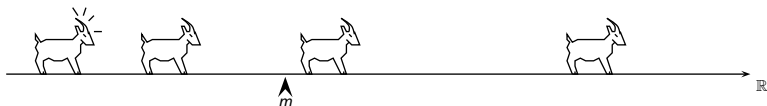
# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

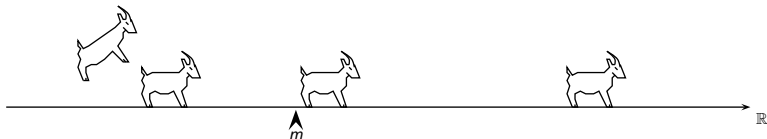
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

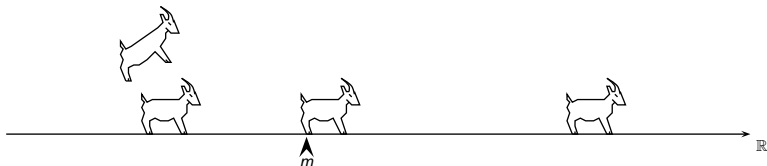
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

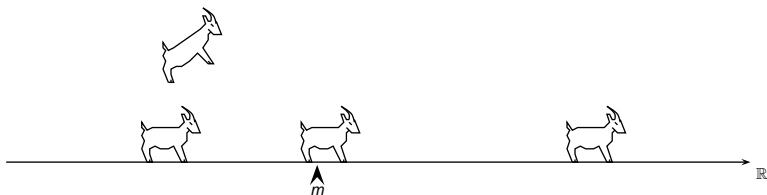
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

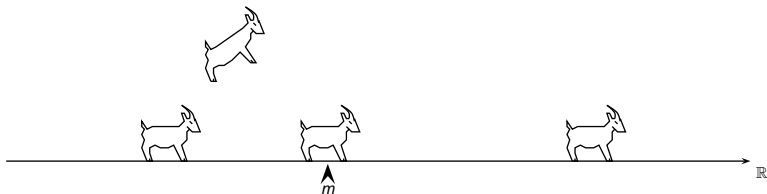
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

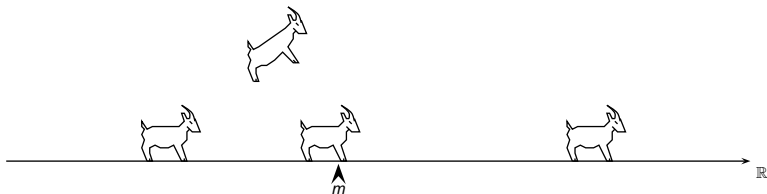
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

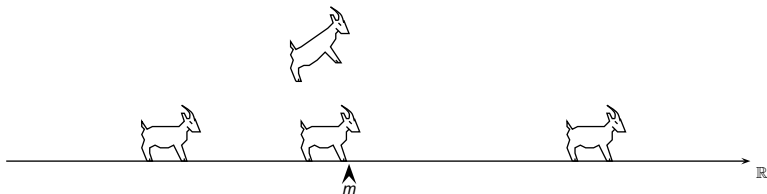
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske

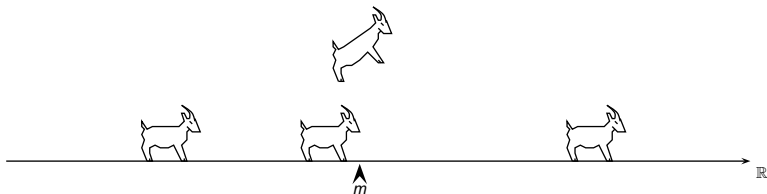


**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.



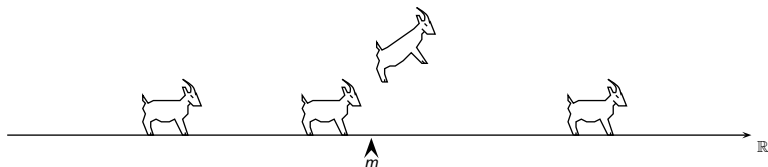
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

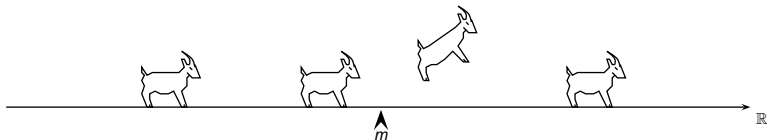
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

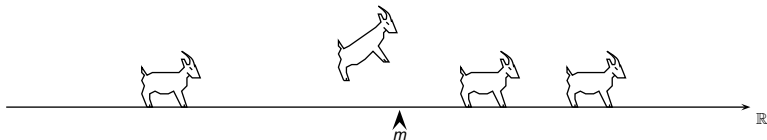
# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

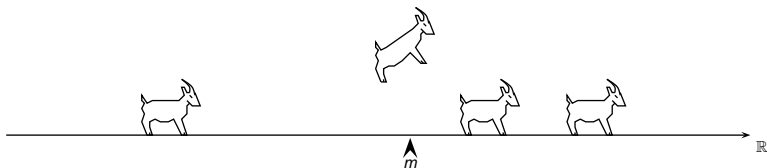
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

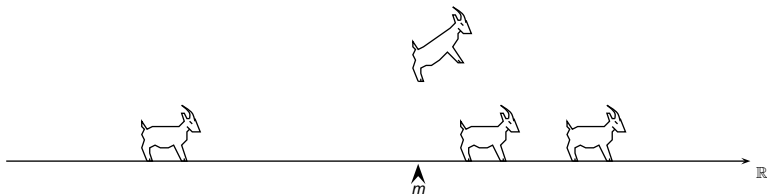
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske

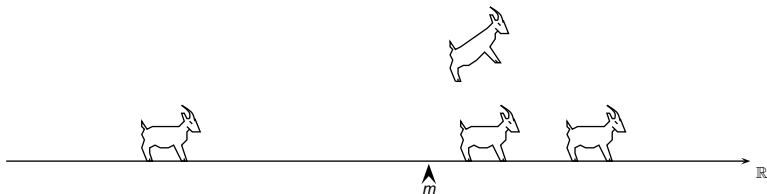


**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.



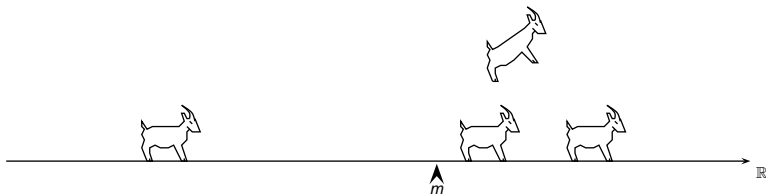
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

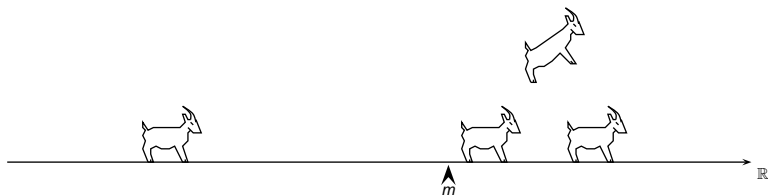
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

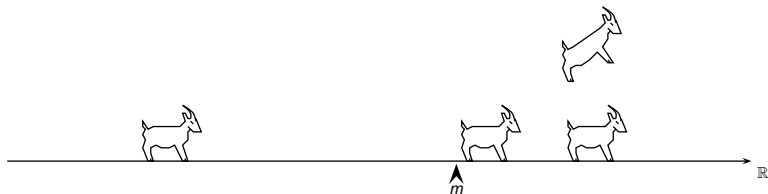
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.



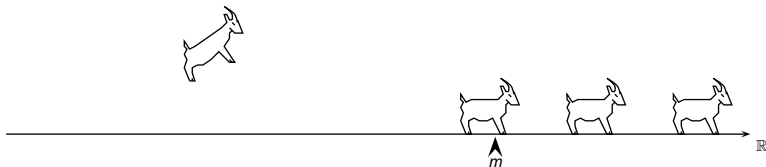
# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

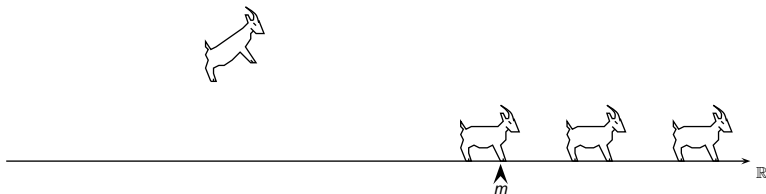
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

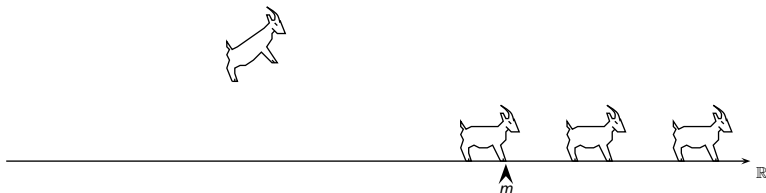
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

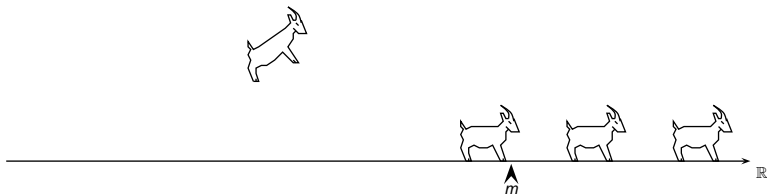
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

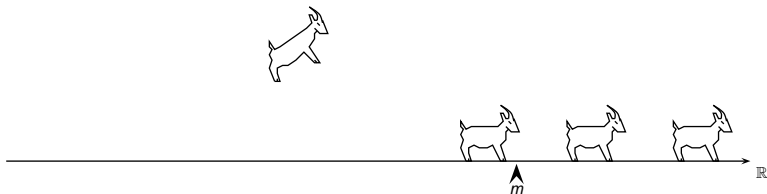
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

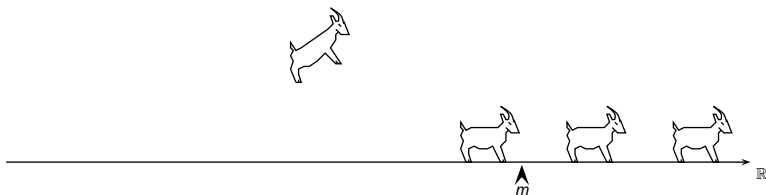
# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

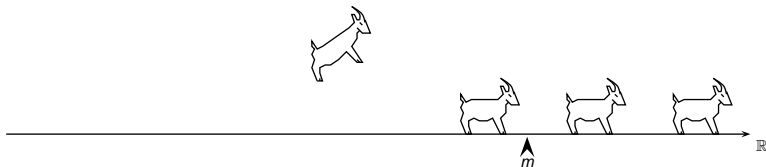
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

## Részecskerendszerek: sok kecske

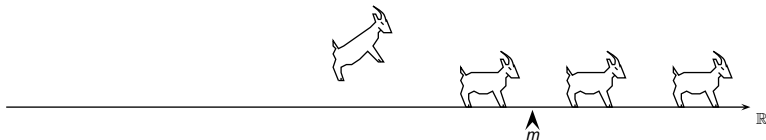


**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.



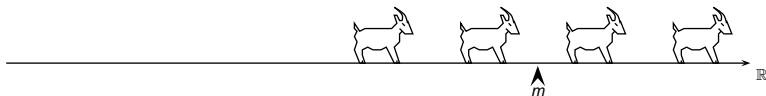
## Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

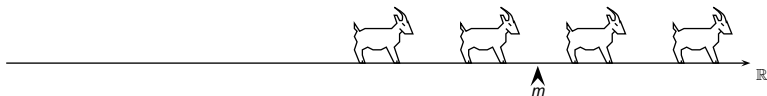
# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

**Rácz Miklós Zoltánnal vizsgáljuk.**

# Részecskerendszerek: sok kecske



**Bálint:** Kecskék ugrálnak előre.

Az ugrási ráta csak attól függ, mennyivel van előrébb (hátrébb) a tömegközéppont.

**Rácz Miklós Zoltánnal vizsgáljuk.**

Nemtriviális.

# Részecskerendszerek: sok, mozgó kőműves

Eddig láttunk:

- egy, mozgó kőművest;
- sok, álló kőművest.

# Részecskerendszerek: sok, mozgó kőműves

Eddig láttunk:

- egy, mozgó kőművest;
- sok, álló kőművest.

**Kombináljunk:** Legyen sok, mozgó kőműves!

# Részecskerendszerek: sok, mozgó kőműves

Eddig láttunk:

- egy, mozgó kőművest;
- sok, álló kőművest.

**Kombináljunk:** Legyen sok, mozgó kőműves!

↪ Két megmaradó mennyiség:

- a kőművesek száma,
- a fal gradiense.

# Részecskerendszerek: sok, mozgó kőműves

Eddig láttunk:

- egy, mozgó kőművest;
- sok, álló kőművest.

**Kombináljunk:** Legyen sok, mozgó kőműves!

↪ Két megmaradó mennyiség:

- a kőművesek száma,
- a fal gradiense.

Fritz József, Bálint, Valkó Benedek, Wendelin Werner:  
hidrodinamika (**nemlineáris PDE rendszer!**) bizonyítása.



# Részecskerendszerek: sok, mozgó kőműves

Eddig láttunk:

- egy, mozgó kőművest;
- sok, álló kőművest.

**Kombináljunk:** Legyen sok, mozgó kőműves!

↪ Két megmaradó mennyiség:

- a kőművesek száma,
- a fal gradiense.

Fritz József, Bálint, Valkó Benedek, Wendelin Werner:  
hidrodinamika (**nemlineáris PDE rendszer!**) bizonyítása.

**Módszerek:** Yau entrópia módszer; kompenzált kompaktság.

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok
- Markov láncok

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok
- Markov láncok
- A valószínűségszámítás határeloszlás- és nagy eltérés tételei

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok
- Markov láncok
- A valószínűségszámítás határeloszlás- és nagy eltérés tételei
- A statisztikus fizika matematikai módszerei



# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok
- Markov láncok
- A valószínűségszámítás határeloszlás- és nagy eltérés tételei
- A statisztikus fizika matematikai módszerei
- Perkoláció

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok
- Markov láncok
- A valószínűségszámítás határeloszlás- és nagy eltérés tételei
- A statisztikus fizika matematikai módszerei
- Perkoláció
- Válogatott fejezetek a valószínűségszámításból

# Egy nagyon erős valószínűségi iskola

- Valószínűségszámítás 1. (matematikus-fizikus (!))
- Valószínűségszámítás 2.
- Valószínűségszámítás 3.
- Sztochasztikus folyamatok
- Markov láncok
- A valószínűségszámítás határeloszlás- és nagy eltérés tételei
- A statisztikus fizika matematikai módszerei
- Perkoláció
- Válogatott fejezetek a valószínűségszámításból
- *És a legjobb tanterem: Bálint szobája!*

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre



## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter
- Stefano Olla

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter
- Stefano Olla
- Révész Pál

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter
- Stefano Olla
- Révész Pál
- Vladas Sidoravicius



## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter
- Stefano Olla
- Révész Pál
- Vladas Sidoravicius
- Stanislav Smirnov

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter
- Stefano Olla
- Révész Pál
- Vladas Sidoravicius
- Stanislav Smirnov
- Wendelin Werner

## Sztochasztika Szeminrium

1999 óta működik Bálint (fő)szervezésében. Vendégeink voltak többek közt:

- Jacob van den Berg
- Erwin Bolthausen
- Krzysztof Burdzy
- Csáki Endre
- Csiszár Imre
- Csörgő Miklós
- Deepak Dhar
- Michael Keane
- Major Péter
- Stefano Olla
- Révész Pál
- Vladas Sidoravicius
- Stanislav Smirnov
- Wendelin Werner
- Marc Yor

# Köszönjük!



Horváth Illés



Kolumbán Sándor



Komjáthy Júlia



Móra Péter

# Köszönjük!



Nándori Péter



Rác Miklós



Ráth Balázs



Rudas Anna

# Köszönjük!



Valkó Benedek



Vető Bálint

... és az előadó.