Matematika A2

10. feladatsor

1. Határozzuk meg a T transzformáció B bázis szerinti mátrixát, majd ebből számítsuk ki a T transzformáció B' szerinti mátrixát! (Anton 5.5: 1, 2, 3)

   (a) Legyen a $T : R^2 \to R^2$ transzformáció a

   $$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

   A két bázis pedig $B = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$ és $B' = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, ahol

   $$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   (b) Legyen a $T : R^2 \to R^2$ transzformáció a

   $$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

   A két bázis pedig $B = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$ és $B' = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, ahol

   $$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   (c) Legyen a $T : R^2 \to R^2$ az origó körüli 45°os fogatás; B és B' pedig az 1a) részben megadott két bázis.

2. Írjuk fel az alábbi mátrixok karakterisztikus egyenleteit! (Anton 6.1: 1)

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. A 2. feladat mátrixainak határozzuk meg a sajátértékeit! (Anton 6.1: 2)

4. Határozzuk meg a 2. feladat mátrixai sajátaltereinek egy bázisát (Anton 6.1: 3)

5. Írjuk fel az alábbi mátrixok karakterisztikus egyenleteit! (Anton 6.1: 5)

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

6. Az 5. feladat mátrixainak határozzuk meg a sajátértékeit! (Anton 6.1: 6)

7. Határozzuk meg az 5. feladat mátrixai sajátaltereinek egy bázisát (Anton 6.1: 7)

8. Döntsük el, hogy az A diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt az P mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $P^{-1}AP$-t! (Anton 6.2: 5, 6, 7, 10, 11 , 12)

(a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Legyen a $T : R^3 \to R^3$ lineáris oprátor az alábbi módon adott:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & & -x_3 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 \end{bmatrix}$$

Határozzunk meg R^3-nak egy olyan bázisát, amelyben T mátrixsza diagonális! (Anton 6.2: 16)

10. Határozzuk meg az alábbi szimmetrikus mátrixok sajátaltereinek a dimenzióját! (Anton 6.3: 1abcd)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

11. Keressük meg azt az ortogonális P mátrixot, amely a szimmetrikus A mátrixot diagonalizálja és írjuk fel a D diagonális mátrixot! Írjuk fel az $A = PDP^{-1}$ ortogonális spektrál-felbontást! (Anton 6.3: 2, 3, 5, 8)

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. Írjuk fel az alábbi kvadratikus formákat x^TAx alakban, ahol A szimmetrikus mátrix! (Anton 7.3: 3abc)

(a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$

(b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

(c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

13. Végezzük el az előző feladat fordítottját az alábbi alakokból kiindulva!

(a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

14. Döntsük el, hogy a két előző feladatbeli kvadratikus alakok pozitív definitek, negatív definitek, szemidefinitek vagy indefinitek-e!

15. Egy bizonyos egyetemi szakra minden évben 100 hallgatót vesznek fel. Az első évesek 80%-a megy tovább másodévre és 10%-a évet ismétel. (A maradék 10% elhagyja az egyetemet.) A másodévesek 20%-a ismétel évet és 80% tovább megy harmadévre. (Közölük senki nem hagyja már abba az egyetemet.) A kiindulási (nulladik) évben 100 fő jár első és 90 fő jár másodévre. Jelölje p_n az elsőévesek, és q_n a másodévesek számát az n-edik évben ($n = 0, 1, 2, \dots$).

    (a) Lássuk be, hogy $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{c}$ és így $\mathbf{x}_{n+1} = A^n\mathbf{x}_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + I)\mathbf{c}$, ahol

    $$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

    (b) Keressük meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

    (c) Írjuk fel azt a P mátrixot, amely A-t diagonalizálja és határozza meg P^{-1}-et! Ekkor $D = P^{-1}AP$ és $A = PDP^{-1}$. (Ez A spektrál-felbontása.)

    (d) Helyettesítsük A-t a fenti képletben a spektrál-felbontásával, és ezzel írjuk fel zárt alakban $\mathbf{x}_n$-et! Vegyük ennek limeszét $n \to \infty$ esetén! Így megkapjuk, hogy sok év elteltével hány elsőéves és másodéves hallgató lesz a szakon.

16. Keressük meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzfomálható és írjuk fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével! (Anton 7.4: 1)

    (a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

    (b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$

    (c) $2x_1x_2$

    (d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$