Matematika A2

11. feladatsor

1. A $B^2 - 4AC$ diszkrimináns segítségével döntsük el, hogy az alábbi egyenletek parabola-, elipszis- vagy hiperbolaegyenletek! (10.3: 1, 3, 5)
   (a) $x^2 - 3yx + y^2 - x = 0$
   (b) $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y = -4$
   (c) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 2 = 0$

2. Forgassuk el a koordinátatengelyeket úgy, hogy az új egyenlet már ne tartalmazzon vegyes tagot. Ezután ábrázoljuk a görbéket. (Az egyenletek alakja más és más lehet aszerint, hogy milyen irányú és mértékű forgatást alkalmaztunk.) (10.3: 17, 23, 25)
   (a) $xy = 2$
   (b) $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y = 0$
   (c) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

3. Ebben a feladatban megadtuk egy xy-síkban mozgó részecske mozgásának paraméteres egyenletrendszerét és a paramétertartományt. Határozzuk meg a részecske mozgásának pályáját oly módon, hogy mozgásegyeletét Descartes-koordinátákban írjuk fel. Ábrázoljuk a Descartes-koordinátákban felírt görbét! Jelöljük ki a görbének azt a részét, amelyet a részecske bejár! Állapítsuk meg a részecske mozgásának irányát is! (10.4: 1, 9, 11)
   (a) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
   (b) $x = t, \quad y = \sqrt{4 - t^2}, \quad 0 \leq t \leq 2$
   (c) $x = -\mathrm{ch}\ t, \quad y = \mathrm{sh}\ t, \quad -\infty < t < \infty$

4. Az alábbi polárkoordinátákban megadott egyenleteket helyettesítsük velük ekvivalens Descartes-koordinátákbna felírt egyenletekkel! Mi lesz a grafikonjuk? (10.5: 33, 39)
   (a) $r = \frac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}$
   (b) $r^2 + 2r^2 \cos\theta \sin\theta = 1$

5. A Descartes-koordinátákban megadott egyenleteket helyettesítsük velük ekvivalens polárkoordinátaegyenletekkel! (10.5: 58, 61)
   (a) $x^2 + xy + y^2 = 1$
   (b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

6. Ábrázoljuk a $-1 \leq r \leq 2$ és $-\pi/2 \leq \theta\pi/2$ egyenlőtleségekkel megadott tartományt! (10.6: 25)

7. Mutassuk meg, hogy az $(1/2, 3\pi/2)$ pont rajta van az $r = -\sin(\theta/3)$ görbén! (10.6: 30)

8. Határozzuk meg az $r = \sqrt{2}$ és az $r^2 = 4\sin\theta$ görbepár metszéspontjait! (10.6: 35)

9. Határozzuk meg a megadott görbék által megadott tartományok területét! (10.7: 7, 9, 15)
   (a) Az $r = 2\cos\theta$ és az $r = 2\sin\theta$ körök közös része
   (b) Az $r = 2$ kör és az $r = 2(1 - \cos\theta)$ kartiod közös része
   (c) Az $r = 6$ kör belsejének az $r = \frac{3}{\sin\theta}$ egyenes fölötti része

10. Határozzuk meg a megadott görbék ívhosszát! (10.7: 23, 26)

    (a) Az $r = 6/(1+\cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$ parabolaszelet

    (b) Az $r = \sqrt{1+\sin 2\theta}$, $0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$ görbe

11. Határozzuk meg az $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/2$ görbe y-tengely forgatásával előálló felület felszínét! (10.7: 29)

    A következő feladatokban $\mathbf{r}(t)$ egy térben mozgó részecske helyét adja meg a t időpontban.

12. Keressük meg a részecske sebesség- és gyorsulásvektorát! Határozzuk meg a részecske sebességének a nagyságát és irányát a kijelölt t időpontban! Írjuk fel a részecske sebességvektorát a sebesség nagyságának és irányának a szorzataként! (13.1: 9, 13)

    (a) $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = 1$

    (b) $\mathbf{r}(t) = (2\ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1$

13. Számítsuk ki a részecske sebesség- és gyorsulásvektora által bezárt szöget a $t = 0$ pillanatban! (13.1: 15, 20)

    (a) $\mathbf{r}(t) = (3t+1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

    (b) $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}$

14. Számoljuk ki az integrálokat! (13.1: 21, 26)

    (a) $\int\limits_0^1 \left(t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}\right) dt$

    (b) $\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\mathbf{k}\right) dt$

15. Írjuk a megadott görbe t_0-beli érintőegyenesének paraméteres egyenletét! (13.1: 33, 35)

    (a) $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (t^2 - \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

    (b) $\mathbf{r}(t) = (a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad t_0 = 2\pi$

16. Keressük meg a görbe normált érintővektorát, majd számoljuk ki a görbe feltüntett részének ívhosszát! (13.3: 1, 3, 8)

    (a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

    (b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 8$

    (c) $\mathbf{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t\cos t - \sin t)\mathbf{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

17. Keressük meg a görbék $t = 0$ kezdőpontú ívhossz paraméterezését az

    $$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)d\tau|$$

    integrál kiszámolásával! Ezután határozzuk meg a görbe feltüntetett részének ívhosszát! (13.3: 11, 14)

    (a) $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

    (b) $\mathbf{r}(t) = (1+2t)\mathbf{i} + (1+3t)\mathbf{j} + (6-6t)\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 0$

18. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat! (12.6: 17, 19, 21, 28, 33, 39, 42, 43, 48)

(a) $x^2 + 4z^2 = 16$
(b) $z^2 - y^2 = 1$
(c) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
(d) $z = 19 - x^2 - y^2$
(e) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
(f) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
(g) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$
(h) $y^2 - x^2 = z$
(i) $y^2 - z^2 = 4$

19. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem! (14.1: 2, 8, 9)

(a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$
(b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

20. Van-e maximuma az $f(x, y, z) = xyz$ függvénynek az $x = 20 - t, y = t, z = 20$ egyenes mentén? Ha igen mi ez? Útmutatás: Helyettesítsük be az egyenes egyenletét!

21. Határozzuk meg a határértékeket! (14.2: 9, 10, 17, 19)

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$
(b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$
(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
(d) $\lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

22. Az (x, y)-sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények? (14.2: 27)

(a) $f(x, y) = \sin(x + y)$
(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

23. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x, y) \to (0, 0)$ esetén! (14.2: 36, 38, 39)

(a) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$
(b) $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$
(c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$