# Matematika A2

## 12. feladatsor

1. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint! (14.3: 2, 7, 16, 20, 29, 37)

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x,y) = e^{xy} \ln y$

   (d) $f(x,y) = \log_y x$

   (e) $f(x,y,z) = \ln(x + 2y + 3z)$

   (f) $f(x,y,z) = x \sin y \cos z$

2. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat! (14.3: 43, 45)

   (a) $f(x,y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$

   (b) $f(x,y) = \ln(x + y)$

3. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben $f_{xy}$-t: először $x$-szerint vagy először $y$-szerint? (14.3: 51aef)

   (a) $f(x,y) = x \sin y + e^y$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$

   (c) $f(x,y) = x \ln xy$

4. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y)$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

   Laplace-egyenletnek! (14.3: 65, 66)

   (a) $f(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $D = \Re^2 / \{(0,0)\}$ tartományon.

5. Fejezzük ki $dw/dt$-t mint a $t$ függvényét kétféleképpen, láncszabállay és behelyettesítéssel is! Azután adjuk meg $dw/dt$ értékét a megadott helyen! (14.4: 1, 5)

   (a) $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$; $t = \pi$

   (b) $w = 2ye^x - \ln z$, $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \operatorname{arctg} t$, $z = e^t$; $t = 1$

6. Fejezzük ki $\partial z / \partial u$-t és $\partial z / \partial v$-t, mint $u$ és $v$ függvényét kétféleképpen, láncszabállyal és behelyettesítéssel is! Azután adjuk meg $\partial z / \partial u$ és $\partial z / \partial v$ értékét a megadott $(u,v)$ helyen! (14.4: 7)
   $z = 4e^x \ln y$, $x = \ln(u \cos v)$, $y = u \sin v$; $(u,v) = (2, \pi/4)$

7. Feltételezve, hogy az alábbi feladatokban $y$ az $x$-nek differenciálható függvénye, használjuk az implicit differenciálásra vonatkozó tételt $dy/dx$ meghatározására az adott pontban! (14.4: 27, 28)

   (a) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$, $(1, 2)$

   (b) $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$, $(0, \ln 2)$

8. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy! (14.5: 1, 3)

   (a) $f(x,y) = y - x$, $(2,1)$  (b) $f(x,y) = y - x^2$, $(-1,0)$

9. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a $P_0$ pontban, $\mathbf{A}$ irányában! (14.5: 9, 13)

   (a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(5,5)$, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

   (b) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $P_0(1,-1,2)$, $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

10. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott $P_0$ pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken! (14.5: 19, 20)

    (a) $f(x,y,z) = (x/y) - yz$, $P_0(4,1,1)$  (b) $f(x,y,z) = xe^y + z^2$, $P_0(1, \ln 2, 1/2)$

11. Adjuk meg az egyenleteit a érintősíknak és a normálegyenesnek a $P_0$ pontban! (14.6: 1, 5)

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0(1,1,1)$  (b) $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$, $P_0(0,1,2)$

12. Keressük meg az alábbi $f$ függvény linearizálását (= standard lineáris közelítését = elsőfokú kétváltozós Taylor-polinomját) az adott $P_0$ középpont körül! Adjuk meg a közelítés hibájának egy felső korlátját is az adott $T$ téglalapon! (14.6: 31, 33)

    (a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5$, $P_0(2,1)$, $T : |x-2| \le 0.1$, $|y-2| \le 0.1$

    (b) $f(x,y) = 1 + y + x \cos y$, $P_0(0,0)$, $T : |x| \le 0.2$, $|y| \le 0.2$ (Használjuk: $|\cos y| \le 1$, $|\sin y| \le 1$)

13. Tegyük fel, hogy a $T$ értéket a $T = x(e^y + e^{-y})$ képletből kell számítanunk, ahol $x$-et is, $y$-t is 2-nek mértük, és $|dx| \le 0.1$, $|dy| \le 0.02$. Becsüljük meg a maximális hibát, amit $T$ számításánál vétünk! (14.6: 47)

14. A háromszög egyik területképlete $(1/2)ab \sin C$, ahol $a$ és $b$ a háromszögnek két oldala, $C$ pedig a közbezárt szög mértéke. Egy háromszög alakú földdarab felmérésekor $a = 150$m, $b = 200$m és $C = 60°$ adódott. Mekkora lehet a terület számított értékének hibája, ha $a$ és $b$ esetén a maximális eltérés 1/2 méter, $C$ esetén pedig $2°$? (14.6: 58)

15. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is! (14.7: 11, 19, 23, 27)

    (a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

    (b) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

    (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

    (d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

16. Keressük meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény abszolút maximumát és minimumát az első síknegyedbe eső háromszög alakú tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ egyenesek határolnak. (14.7: 33)

17. Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely $(x,y)$ pontban a hőmérséklet értéke $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Ábrázoljuk a hőmérséklet néhány szintgörbéjét $D$-ben (az ún. izotermákat). Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját! (14.7: 41)

18. Keressük meg az $f(x,y) = xy$ és a $g(x,y) = 2x^2 + y^2$ függvények maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$ félkörön! (14.7: 53bc)

19. Adjuk meg az $f(x, y)$ függvény négyzetes vagy köbös közelítését a Taylor-formula segítségével az origó környezetében! (14.10: 3, 5)

(a) $f(x, y) = y \sin x$

(b) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$

20. Oldjuk meg a következő feladatot! (14.8: 7)

(a) Mennyi a minimuma $x + y$-nak, ha $xy = 16$, $y > 0$?

(b) Mennyi a maximuma $xy$-nak, ha $x + y = 16$? Elemezzük ki a megoldások geometriáját!

21. Mekkorák a méretei az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel? Mekkora a területe? (14.8: 12)