Matematika A2

13. feladatsor

1. Vázoljuk fel az integrálási tartományt é számítsuk ki az integrált! (15.1: 5, 6, 7, 9, 19, 20)

   (a) $\int_0^\pi \int_0^x x \sin x \, dy \, dx$

   (b) $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx$

   (c) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy$

   (d) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^2 e^{xy} \, dx \, dy$

   (e) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{1/\cos y} 3 \cos y \, dx \, dy$

   (f) $\int_0^3 \int_1^{4-2y} \frac{4-2y}{x^2} \, dx \, dy$

2. Vázoljuk fel az integrálási tartományt, írjuk fel és számítsuk ki az integrált fordított integrálási sorrenddel! (15.1: 31, 33, 35, 38)

   (a) $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$

   (b) $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, dx \, dy$

   (c) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, dx \, dy$

   (d) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} \, dy \, dx$

3. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a $z = 12 - 3y^2$ henger és az $x + y = 2$ sík vág ki az első térnyolcadból! (15.1: 47)

4. Impropius kettős integrálok az egyváltozós impropius integrálokhoz hasonlóan értelmezhetők, és hasonlóan is számíthatók. Először meghatározzuk az integrált véges tartományon, és megnézzük a határértéket, amint a határok a két változóra **egymástól függetlenül** végtelenbe tartanak. Számítsuk az integrálokat kétszeres integrálként, majd vizsgáljuk az egyváltozó szerinti végtelenben vett határértéket! (15.1: 51, 53)

   (a) $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} \, dy \, dx$

   (b) $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \, dx \, dy$

5. Vázoljuk az adott görbékkel határolt tartományt, azután fejezzük ki a területét mint kétszeres integrált, majd számítsuk is ki a területet! (15.2: 1, 3, 7)

   (a) A koordinátatengelyek és az $x + y = 2$ egyenes.

   (b) Az $x = -y^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes.

   (c) Az $x = y^2$ és $x = 2y - y^2$ parabolák.

6. Az ebben a feladatban szereplő integrálok, ill. ezek összegei, xy-síkbeli tartományok területét adják. Vázoljuk fel a tartományokat, adjuk meg a határológörbéket és a metszéspontokat! Majd számítsuk ki az integrálokat! (15.2: 11, 13, 14)

   (a) $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy \, dx$

   (b) $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy \, dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy \, dx$

   (c) $\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy \, dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy \, dx$

7. Térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az integrált! (15.3: 1, 9, 13, 15)

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

(b) $\int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$

(c) $\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy\, dx$

(d) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\, dx\, dy$

8. Mekkora az a terület, amit az x-tengely pozitív fele és az $r = 4\theta/3$ spirális $0 \leq \theta \leq 2\pi$ közötti darabja zár közre? (A tartomány csigaházra emlékeztet.) (15.3: 20)

9. Áttérés polárkoordinátákra: Számítsuk ki az

$$\int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

integrált! (15.3: 38)

10. Oldjuk meg az

$$u = 3x + 2y, \quad v = x + 4y$$

egyenleteket x-re és y-ra! Ezután adjuk meg a $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ Jacobi-determinánst! Mi lesz annak az xy-síkbeli háromszögnek a képe az $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$ transzformációval, amelyet az y-tengely, x-tengely és az $x + y = 1$ egyenes határol? Vázoljuk fel a képet az uv-síkban! (15.7: 3)

11. Használjuk az előző feladat transzformációját au

$$\iint\limits_{T} (3x^2 + 14xy + 8y^2)\, dx\, dy$$

integrál kiszámításához, ahol a T tartomány az első síknegyedben van, és az $y = -(3/2)x + 1$, $y = -(3/2)x + 3$, $y = -(1/4)x$, $y = -(1/4)x + 1$ egyenesek határolják! (15.7: 7)

12. Legyen T egy tartomány az xy-sík ekső síknegyedében, amelyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyenesek határolnak. Használjuk az $x = u/v$, $y = uv$, $u > 0$, $v > 0$ transzformációt az

$$\iint\limits_{T} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\, dy$$

integrál átírásához egy megfelelő G tartományra az uv-síkon! Számítsuk ki az integrált! (15.7: 9)

13. Használjuk az $x = u + (1/2)v$, $y = v$ transzformációt az

$$\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\, dx\, dy$$

integrál átírására az uv-sík egy G tartománya fölötti integrállá, majd számítsuk ki az integrál értékét! (15.7: 14)

14. Adjuk meg a következő transzformációk $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ Jacobi-determinánsát! (15.7: 15)

(a) $x = u\cos v, \quad y = u\sin v$

(b) $x = u\sin v, \quad y = u\cos v$