Matematika A2

2. gyakorlat

Számsorok

Az integrál teszt

1. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek és melyek divergensek! Válaszunkat indokoljuk! (A válasz ellenőrzéséhez hasznos, ha szem elött tartjuk azt, hogy egy sor konvergenciája többféle módon vizsgálható.) (11.3: 1, 3, 9, 17, 21, 25)

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

   (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

   (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

   (e) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1/n}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n-1}}$

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

2. Mely a esetén konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$ sor? (11.3: 31)

3. **Logaritmikus p-sorok:** (11.3: 39)

   (a) Legyen p pozitív állandó. Igazoljuk, hogy

   $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

   pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$!

   (b) Milyen következtetést vonhatunk le a feladat (a) része alapján a

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

   sorra vonatkozóan? Válaszunkat indokoljuk!

Összehasonlító tesztek

4. Az alább megadott végtelen sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk! (11.4: 1, 7, 13, 17, 25, 33)

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

A hányados és gyök teszt

5. Az alább megadott végtelen sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk! (11.5: 1, 5, 9, 15, 19, 25, 43)

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ln n}{n(n+2)!}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{4^n 2^n n!}$

6. Az alább megadott $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk! (11.5: 27, 31, 35)

(a) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

(b) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

(c) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

Abszolút és feltételes konvergencia

7. Az alábbi sorok közül melyek az abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek? (11.6: 11, 19, 27, 39)

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 0.1^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Hatványsorok

8. Adjuk meg az itt szereplő sorok **(i)** konvergenciasugarát és konvergenciaintervallumát! Állapítsuk meg, hogy a sorok **(ii)** mely x értékek esetén abszolút konvergensek, és **(iii)** mely x értékek esetén feltételesen konvergensek? (11.7: 7, 13 ,15 , 29)

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

9. Mely x-ek esetén konvergens az

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \ldots$$

   végtelen sor? Mi a sor összege? Melyik sort kapjuk tagonkénti deriválással? Mely x-ek esetén konvergens az új sor? Ahol konvergens, mennyi az összege? (11.7: 39)

10. A

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

   hatványsor minden x esetén konvergens. (11.7: 41)

   (a) Adjuk meg a cos függvény sorának első hat tagját! Mely x-ek esetén konvergens ez a sor?

   (b) A $\sin x$ sorában x helyébe $2x$-et írva adjuk meg a $\sin 2x$ függvény – minden x estetén konvergens – hatványsorát!

   (c) A feladat (a) részének eredményét felhasználva számítsuk ki a $2 \sin x \cos x$ függvény hatványsorának első hat tagját! Vessük ezt össze a feladat (b) részére adott válaszunkkal!

Taylor-sorok

11. Írjuk fel a függvény nullad- első- másod- és harmad-rendű Taylor-polinomjait a megadott helyen! (11.8: 1, 5, 7)

   (a) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

   (b) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

12. Határozzuk meg az f által (a jelzett helyen) generált Taylor-sort! (11.8: 21, 25, 27)

   (a) $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$

   (b) $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$

   (c) $f(x) = e^x, \quad a = 2$