Matematika A2

3. feladatsor

Függvénysorok, hatványsorok

A Taylor-sorok konvergenciája, Taylor tétele

1. Adjuk meg a függvények Taylor-sorát az $x = 0$ helyen! (11.9: 7, 11, 13, 17)

   (a) xe^x

   (b) $x \cos \pi x$

   (c) $\cos^2 x$ (Útmutatás: $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$)

   (d) $\frac{1}{(1-x)^2}$

2. Milyen pontos a $\sin x = x$ közeltés az $|x| < 10^{-3}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x-ek esetén? Mely x értékekre lesz $x < \sin x$? (11.9: 21)

3. Kicsiny x-ekre gyakran használjuk az $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ közelítést. A maradéktagra vonatkozó tétel segítségével becsüljük meg a hiba nagyságát, amennyiben $|x| < 0.1$! (11.9: 23)

4. Milyen pozitív x-ek esetén közelíthető $\ln(1 + x)$ x-szel, ha azt akarjuk, hogy a hiba az x szám 1 százalékánál ne legyen nagyobb? (11.9: 27)

5. A $\sin x$ Taylor-sora és az alternáló sorok közelítő összegére vonatkozó tétel alapján igazoljuk, hogy

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

   , ha $0 < |x| < 1$. (11.9: 29a)

Maclaurin-sorok

Emlékeztetünk arra, hogy a Maclaurin-sorok az $x = 0$ helyen vett Taylor-sorok.

6. Megadtuk két $f(x)$ függvény Maclaurin-sorát valamely pontokban. Mely függvényekről és mely pontokról van szó? Mi a sorok összege? (11.9: 31, 33)

   (a) $0.1 - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k 0.1^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$

   (b) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{\pi^5}{3^5 \cdot 5} - \cdots + \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{3^{2k+1} \cdot (2k+1)} + \cdots$

7. Szorozzuk össze az e^x és $\cos x$ függvények Maclaurin-sorát és adjuk meg az $e^x \cos x$ függvény Maclaurin-sorának első öt nemnulla tagját! (11.9: 36)

Az Euler-formula

8. Az $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ összefüggés alapján írjuk fel az alábbi e-hatványokat $a + ib$ alakban. **(a)** $e^{-i\pi}$, **(b)** $e^{i\pi/4}$, **(c)** $e^{-i\pi/2}$. (11.9: 49)

9. Az e^x és a $\sin x$ függvény Taylor-sorának összeszozásával adjuk meg az $e^x \sin x$ függvény Taylor sorát az ötödfokú tagig! Ellenőrizzük a megoldásunkat annak alapján, hogy a szóban forgó sor az

$$e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

függvény Taylor -sorának a képzetes része! Mely x-ek esetén konvergens az $e^x \sin x$ függvény Taylor-sora? (11.9: 53)

10. Az Euler-formula segítségével mutassa meg, hogy minden valós x-re $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, és $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

Hatványsorok alkalmazása

11. A kétszer differenciálható $f(x)$ függvény $x = a$-beli másodrendű Taylor-polinomját az f függvény $x = a$ helyen vett **kvadratikus közelítésének** nevezzük. Az alább megadot függvényeknek adjuk meg a **(i)** linearizációját, és **(ii)** kvadratikus közelítését és a hozzájuk tartozó hibatagot! (11.8: 33, 35)

   (a) $f(x) = \ln(\cos x)$

   (b) $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

12. Helyettesítsen $-x$-et x helyébe az $\ln(1+x)$ 0 körüli Taylor-sorába, hogy megkapja az $\ln(1-x)$ sorát! Ezután vonja ezt ki $\ln(1+x)$ sorából, és így igazolja, hogy $|x| < 1$ esetén az $\operatorname{arth} x = \tanh^{-1} x$ függvény Taylor-sora

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots .$$

13. Írjuk fel a megadott függvények binomiális sorának első négy tagját! (11.10: 3, 7, 9, 13)

   (a) $(1-x)^{-1/2}$

   (b) $(1+x^3)^{-1/2}$

   (c) $(1+\frac{1}{x})^{1/2}$

   (d) $(1-2x)^3$

14. Sorok segítségével számítsuk ki a határértékeket! (11.10: 47, 51, 55)

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

15. Sorok segítségével adjunk 10^{-3} pontosságú becslést az alábbi határozott integrálokra! (11.10: 33, 37, 39)

   (a) $\int\limits_0^{0.2} \sin x^2 dx$

   (b) $\int\limits_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$

   (c) $\int\limits_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$

16. Belátható, hogy az alábbi hatványsor a $\tan x = \operatorname{tg} x$ függvényt állítja elő $-\pi/2 < x < \pi/2$ esetén:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots .$$

   (a) Enek alapján írja fel az $\ln(\sec x)$ függvény Taylor-sorának első négy tagját ($\sec x = 1/\cos x$)! (Útmutatás: integráljon.) Milyen x-ekre konvergens a sor?

   (b) Keresse meg a $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ függvény sorának első három tagját! (Útmutatás: differenciáljon.) Milyen x-ekre konvergens a sor?

Fourier-sorok

17. Írjuk fel a megadott 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorát! Vázoljuk a függvények grafikonját is! (11.11: 3, 5, 7, 11.gyf: 108)

    (a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ x - 2\pi & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

    (b) $f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

    (c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

    (d) $f(x) = |\sin x|, \quad 0 \le x \le 2\pi$

18. Mutassa meg, hogy a könnyen igazolható

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x, \ \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

azonosságok Fourier-sorként is interpretálhatóak!