

Matematika A2

4. feladatsor

Fourier-sorok

1. Keresse meg az alábbi T szerint periodikus $f(t)$ függvények Fourier-sorát. Rajzolja fel az $f(t)$ grafikonját, együtt a Fourier-sora első három részletösszegének a grafikonjával!

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -1 < t < 1 \\ 0, & \text{ha } 1 < t < 3 \end{cases} \quad (T = 4)$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < t < 0 \\ t, & \text{ha } 0 < t < 1 \end{cases} \quad (T = 2)$$

2. Legyen $f(x) = 1$, ha $0 \leq |x| \leq \pi/2$, $f(x) = 0$, ha $\pi/2 < |x| \leq \pi$, és legyen f 2π szerint periodikus: $f(x + 2\pi) = f(x)$ minden x -re.

(a) Keresse meg f Fourier-sorát!

(b) Mutassa meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \frac{\pi}{4}$$

3. Legyen $f(x) = (\pi - |x|)^2$ a $[-\pi, \pi]$ intervallumon és legyen f 2π periodikus. Mutassa meg, hogy

$$f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx$$

Lineáris egyenletrendszerek

4. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenletrendszerekhez tartozó kibővített mátrixot! (Anton 1.1: 3a, c)

$$(a) \begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{rcl} x_1 & & + & x_3 & & = & 1 \\ & 2x_2 & - & x_3 & & + & x_5 & = & 2 \\ & & & 2x_3 & + & x_4 & & = & 3 \end{array}$$

5. A k konstans mely értékeire nincs az alábbi egyenletrendszernek megoldása? Pontosan egy megoldása? Végtelen sok megoldása? (Anton 1.1: 5)

$$\begin{array}{rcl} x & - & y & = & 3 \\ 2x & - & 2y & = & k \end{array}$$

6. Tegyük fel, hogy egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát elemi sorműveletekkel echelon-formájúra hoztuk. Oldjuk meg a rendszert! (Anton 1.2: 3c, 4a, 4b)

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Gauss-Jordan módszerrel oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! (Anton 1.2: 5a, 7b, 9a)

$$(a) \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$(b) \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 11x_1 + 7x_2 &= -30 \end{aligned}$$

$$(c) \begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket! (Anton 1.3: 2, 5)

$$(a) \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(b) \begin{aligned} x + 6y - 2z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

9. λ mely értéke mellett van az alábbi egyenletrendszernek nemtriviális megoldása? (Anton 1.3: 6)

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$