Matematika A2

5. gyakorlat

1. Az a mely értékei mellett van az alábbi rendszernek pontosan egy megoldása? Végtelen sok megoldása? Nincs megoldása? (Anton 1.2: 12)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}$$

2. Legyen A és B 4×5-ös, valamint C, D, és E 5×2-es, 4×2-es, és 5×4-es. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrix műveletek közül melyek értelmezettek, és adjuk meg az eredmények méretét. (Anton 1.4: 1)

   (a) BA (b) $AC+D$ (c) $AE+B$ (d) $AB+B$ (e) $E(A+B)$ (f) $E(AC)$ (g) E^TA (h) $(A^T+E)D$

3. Oldjuk meg a következő mátrix egyenletet a-ra, b-re, c-re, és d-re. (Anton 1.4: 3)

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Végezzük el az alábbi mátrix-műveleteket! (Persze, ha lehetségesek.) (Anton: 1.4: 4de, 5acd, 6adf)

   (a) DE (b) ED (c) $3C-D$ (d) $(AB)C$ (e) $A(BC)$ (f) BA^T-C^T (g) $D^TE^T-(ED)^T$

5. Használjuk az előző feldatban definiált mátrixokat. A lehetséges legkevesebb számolást használva határozzuk meg a $C(DE)$ mátrix 2. sorának 3. elemét! (Anton 1.4: 8)

6. Egy négyzet alakú mátrixot **diagonális mátrixnak** nevezünk, ha a fődiagonálisán kivűl lévő összes eleme nulla. Mutassuk meg, hogy diagonális mátrixok szorzata diagonális. Határozzuk meg a diagonális mátrixok szorzását leíró szabályt! (Anton 1.4: 13)

7. Legyen

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad a=-3 \quad b=2$$

   Ellenőrizzük az alábbi kifejezésket! (Anton 1.5: 1abc, 2c, 3bd)

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $(AB)C = A(BC)$

(c) $(a + b)C = aC + bC$

(d) $A(B - C) = AB - AC$

(e) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(f) $(AB)^T = B^T A^T$

8. A 2×2-es mátrixok invertálására vonatkozó formulával határozzuk meg a mátrixok inverzét. (Anton 1.5: 4)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Legyen A invertálható mátrix. Tegyük fel, hogy a $7A$ inverze

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg A-t! (Anton 1.5: 8)

10. Tekintsük a következő A, B , és C mátrixokat.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Melyek azok az E_1, E_2, E_3, és E_4 elemi mátrixok, melyekre

(a) $E_1A = B$ (b) $E_2B = A$ (c) $E_3A = C$ (d) $E_4C = A$

(Anton 1.6: 3)

11. Elemi sorműveletek segítségével határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét. (Anton 1.6: 5a, 6b, 7c)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. Mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixnak θ minden értékére van inverze. Írjuk fel A^{-1}-t! (Anton 1.6: 8)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $A = EFR$ alakban, ahol E és F elemi mátrixok, és R sor-echelon formájú. (Anton 1.6:11)

14. Oldjuk meg az alábbi rendszereket az $X = A^{-1}B$ képletet felhasználva. (Anton 1.7: 1, 8)

(a) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & -3 \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & b_2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_3 \end{array}$

15. Oldjuk meg párhuzamosan az egyenletrendszereket! (Anton 1.7: 11, 13)

(a)
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 3x_2 & = & b_1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & b_2 \end{array}$$

i. $b_1 = 1, \quad b_2 = 4$

ii. $b_1 = -2, \quad b_2 = 5$

(b)
$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & = & b_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & b_2 \end{array}$$

i. $b_1 = 0, \quad b_2 = 1$

ii. $b_1 = -4, \quad b_2 = 6$