Matematika A2

5. gyakorlat

Determináns

1. Adjuk meg az inverziók számát az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ alábbi permutációiban! (Anton 2.1: 1)

   (a) $\{3, 4, 1, 5, 2\}$ (b) $\{4, 2, 5, 3, 1\}$ (c) $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ (d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (e) $\{1, 3, 5, 4, 2\}$ (f) $\{2, 3, 5, 4, 1\}$

2. A determináns definiciója alapján számítsuk ki a determinánsokat! (Anton 2.1: 4, 7, 10)

   (a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$

3. Igazoljuk a determináns definiciójából, hogy ha A olyan négyzet alakú mátrix, amelynek van egy csak nullákból álló oszlopa, akkor $\det(A) = 0$! (Anton 2.1: 16)

4. A mátrix sor-echelon alakúra hozásával határozzuk meg a determinánsokat! (Anton 2.2: 2, 3, 4, 5, 7, 9)

   (a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

   (e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. Tegyük fel, hogy $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5$. Határozzuk meg az alábbi determinánsokat. (Anton 2.2: 10bd)

   (a) $\det \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$ (b) $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$

6. A determináns segítségével határozzuk meg, hogy a mátrixok invertálhatóak-e! (Anton 2.3: 4ab)

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

7. Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok. Mutassuk meg, hogy ha A invertálható, akkor $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$! (Anton 2.3: 14)

8. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az összes

(a) minorját,

(b) előjeles aldeterminánsát. (Anton2.4: 1)

9. Számítsuk ki az előző feladatban megadott mátrix determinánsát alaklmazva a kifejtési tételt

(a) az első sorra

(b) az első oszlopra

(c) a második sorra

(d) a második oszlopra

(e) a harmadik sorra

(f) a harmadik oszlopra

alkalmazva. (Anton 2.4: 3)

10. A 8. feladatban megadott mátrixnak számítsuk ki

(a) az adjungáltját

(b) az inverzét, felhasználva az $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$ képletet. (Anton 2.4: 4)

11. Számítsuk ki a mátrixok determinánsát tetszőleges sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel. (Anton 2.4: 7, 8)

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$

12. Az adjungált segítségével határozzuk meg A^{-1}-et! (Anton 2.4: 11, 14)

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

13. Oldjuk meg a rendszereket a Cramer szabály segítségével! (Anton 2.4: 20 21)

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & -32 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 14 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 15 \end{array}$$

14. A Cramer szabályt használva határozzuk meg z-t anélkül, hogy x-et, y-t, vagy w-t meghatároznánk! (Anton 2.4: 22)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & y & + & z & + & w & = & 6 \\ 3x & + & 7y & - & z & + & w & = & 1 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & + & 8w & = & -3 \\ x & + & y & + & z & + & 2w & = & 3 \end{array}$$

15. Legyen $AX = B$ az előző feladatban megadott rendszer.

(a) Oldjuk meg Cramer szabállyal!

(b) Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval!

(c) Melyik módszerrel kell kevesebbet számítanunk? (Anton 2.4: 23)

16. Legyen adott $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ és $y_1, y_2, \ldots y_n$. A $VU = Y$ lineáris egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg az $(\alpha_1, y_1), (\alpha_2, y_2), \ldots (\alpha_n, y_n)$ pontokon átmenő (Lagrange-féle) $(n-1)$-edrendű interpolációs polinomot! (Megj.: A V jelöli az α_i pontokból képzett Vandermonde mátrixot, az Y az y_i-kből képzet n-dimenziós vektort, az egyenletrendszer megoldásával keletkező U vektor pedig megadja az interpolációs polinom megfelelő együtthatóit. Az adott feltételek mellett $\det(V)$ biztosan nem nulla, így a rendszernek egyértelmű megoldása van.)

    (a) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$; $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 2$
    (b) $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 2$; $y_1 = 5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 15$