Matematika A2

7. gyakorlat

1. Vektorterek

1. A következőkben megadunk halmazokat az összeadás és a skalárszorzás definiálásával. Határozzuk meg, hogy mely halmazok alkotnak vektortereket az adott műveletekkel! Azon halmazokra, amelyek nem alkotnak vektorteret, soroljuk fel, hogy mely axiómák nem teljesülnek! (Anton 4.2: 6, 10, 11)

   (a) Az alaphalmaz a valós elemű (x, y) számpárok halmaza, ahol $x \geq 0$, az R^2-n szokásos műveletekkel.

   (b) Az alaphalmaz az
   $$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$
   alakú 2×2-es mátrixok halmaza a mátrix-összeadással és a skalár-szorzással.

   (c) Az alaphalmaz az
   $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
   alakú 2×2-es mátrixok halmaza a mátrix-összeadással és a skalár-szorzással.

2. Határozzuk meg, hogy az alábbiak közül melyek alkotják az R^3 egy alterét! (Anton 4.3: 1)

   (a) Az $(a, 0, 0)$ alakú vektorok.

   (b) Az $(a, 1, 1)$ alakú vektorok.

   (c) Az (a, b, c) alakú vektorok, ahol $b = a + c$.

   (d) Az (a, b, c) alakú vektorok, ahol $b = a + c + 1$.

3. Határozzuk meg, hogy az alábbiak közül melyek alkotják az P_3 egy alterét! (Anton 4.3: 3)

   (a) Az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alakú polinomok, amelyekre $a_0 = 0$.

   (b) Az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alakú polinomok, amelyekre $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

   (c) Az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alakú polinomok, amelyekre a_0, a_1, a_2, és a_3 egész számok.

   (d) Az $a_0 + a_1x$ alakú polinomok, amelyekre a_0 és a_1 valós számok.

4. Fejezzük ki az alábbi vektorokat az $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$, és $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$ vektorok lineáris kombinációjaként! (Anton 4.3: 6)

   (a) $(5, 9, 5)$ (b) $(2, 0, 6)$ (c) $(0, 0, 0)$ (d) $(2, 2, 3)$

5. Határozzuk meg, hogy az alábbiak közül melyek fekszenek az $\mathbf{f} = \cos^2 x$ és a $\mathbf{g} = \sin^2 x$ vektorok által kifeszített altérben! (Anton 4.3: 10)

   (a) $\cos 2x$ (b) $3 + x^2$ (c) 1 (d) $\sin x$

6. Az alábbi vektorhalmazok közül melyek alkotnak lineárisan független rendszert R^3-ban? (Anton 4.4: 2)

   (a) $(2, -1, 4)$, $(3, 6, 2)$, $(2, 10, -4)$

   (b) $(3, 1, 1)$, $(2, -1, 5)$, $(4, 0, 4)$

(c) $(6, 0, -1)$, $(1, 1, 4)$

(d) $(1, 3, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(5, 6, 3)$, $(7, 2, -1)$

7. (a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v_1} = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v_2} = (6, 0, 5, 1)$, és $\mathbf{v_3} = (4, -7, 1, 3)$ lineárisan függő rendszert alkotnak R^4-ben.

   (b) Fejezzük ki mindegyik vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként! (Anton 4.5: 9)

8. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmaz bázist alkot M_{22}-ben!

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Anton 4.5: 5)

9. Határozzuk meg az R^3 alábbi altereinek a bázisait! (Anton 4.5: 13)

   (a) A $3x - 2y + 5z = 0$ egyenletű sík

   (b) Az $x - y = 0$ egyenletű sík

   (c) Az $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$ egyenes

   (d) Az (a, b, c) alakú vektorok, ahol $b = a + c$

10. Legyen V egy véges dimenzós W vektortér egy altere. Mutassuk meg, hogy $\dim(V) \leq \dim(W)$. (Anton 4.5: 19)

11. Keressük meg egy bázisát az R^4 megadott vektorai által kifeszített alterének. (Anton 4.6: 6)

   (a) $(1, 1, -4, -3)$, $(2, 0, 2, -2)$, $(2, -1, 3, 2)$

   (b) $(-1, 1, -2, 0)$, $(3, 3, 6, 0)$, $(9, 0, 0, 3)$

   (c) $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(-2, 0, 2, 2)$, $(0, -3, 0, 3)$

12. Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{b}$ vektor benne van-e az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített térben! Ha benne van, akkor fejezzük ki $\mathbf{b}$-t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként! (Anton 4.6: 12)

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$