Matematika A2

9. feladatsor

1. Tekintsük az R^n-et és rajta az euklideszi skalár szorzatot ($n = 2, 3, 4$). Határozzuk meg az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektorok által bezárt szög koszinuszát! (Anton 4.8: 9)

   (a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$

   (b) $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 8)$

   (c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$

   (d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$

   (e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$

   (f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

2. Tekintsük a P_2-t és rajta a $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ skalár szorzatot, ha $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ és $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Határozzuk meg az $\mathbf{p}$ és a $\mathbf{q}$ vektorok által bezárt szög koszinuszát! (Anton 4.8: 10)

   (a) $\mathbf{p} = -1 + 5x + 2x^2, \quad \mathbf{q} = 2 + 4x - 9x^2$

   (b) $\mathbf{p} = x - x^2, \quad \mathbf{q} = 7 + 3x + 3x^2$

3. Ellenőrizzük a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget! (Anton 4.8: 17)

   (a) $\mathbf{u} = (-2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -3)$ az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ skalár szorzással

   (b) $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ és $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ az $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ skalárszorzással, ha $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ és $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$

   (c) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$ és $\mathbf{q} = 2 - 4x^2$ a 2. feladatban megadott skalárszorzással

4. Legyen V egy skalárszorzatos tér. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ ortogonális vektorok V-ben úgy, hogy $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, akkor $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$! (Anton 4.8: 18)

5. Legyen V egy skalárszorzatos tér. Igazoljuk a

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

   azonosságot V minden $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorára! (Anton 4.8: 19)

6. Használjuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, hogy minden a, b és θ valós számra belássuk, hogy

$$[a \cos\theta + b \sin\theta]^2 \le a^2 + b^2.$$

   (Anton 4.8: 29)

7. Tekintsük az R^3-at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok? (Anton 4.9: 2)

   (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   (b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

   (c) $(1, 0, 0)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0, 0, 1)$

   (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

8. Tekintsük P_2-t és rajta a 2. feladatban megadott skalárszorzást. Az alábbiak közül melyek ortonormált halmazok? (Anton 4.9: 3)

   (a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2, \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2, \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

   (b) $1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x^2$

9. Legyen $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ és $\mathbf{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Mutassuk meg, hogy az $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ pár ortonormált az R^2-en az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ skalár szorzattal, viszont nem ortogonáli az euklideszi skalár szorzattal! (Anton 4.9: 5)

10. Tekintsük az R^3-at az euklideszi skalár szorzással. Használjuk a Gram-Schmidt-módszert az $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ bázis ortonormált bázissá alakítására! (Anton 4.9: 8)

    (a) $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{u_3} = (1, 2, 1)$

    (b) $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u_2} = (3, 7, -2)$, $\mathbf{u_3} = (0, 4, 1)$

11. Tekintsük az R^3-at az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ skalár szorzással. A Gram-Schmidt-módszerrel alakítsuk az

$$\mathbf{u_1} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u_2} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{u_3} = (1, 0, 0)$$

    halmaz ortonormált bázissá! (Anton 4.9: 11)

12. Tekintsük az R^4-et az euklideszi skalár szorzással. Fejezzük ki a $\mathbf{w} = (-1, 2, 6, 0)$ vektort $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ alakban, ahol $\mathbf{w_1}$ a W-vel jelölt $\mathbf{u_1} = (-1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{u_2} = (0, 1, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér egy eleme, $\mathbf{w_2}$ pedig merőleges W-re! (Anton 4.9: 14)

13. Keressük meg az $5x - 3y + z = 0$ sík $P(1, -2, 4)$ ponthoz legközelebb eső Q vektorát, majd határozzuk meg a P pont és a sík távolságát! (**Segítség:** Tekinsünk a síkra mint R^3 egy alterére.) (Anton 4.9: 22)

14. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ szerinti koordináta vektorát és a koordináta mátrixát ! (Anton 4.10: 2)

    (a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\quad \mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v_3} = (3, 3, 3)$

    (b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\quad \mathbf{v_1} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v_3} = (7, -8, 9)$

15. Tekinsük a $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ és a $B' = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ R^2 bázisait, ahol

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

    (a) Keressük meg a B'-ből B-be való bázisátmenet mátrixát!

    (b) Keressük meg a B-ből B'-be való bázisátmenet mátrixát!

    (c) Számítsuk ki a $[\mathbf{w}]_B$ koordináta mátrixot, ahol $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ és a $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{w}]_B$ képlettel számítsuk ki $[\mathbf{w}]_{B'}$-t is!

    (d) Számításunk ellenőrzésekén számítsuk ki direkt módon is a $[\mathbf{w}]_{B'}$-t! (Anton 4.10: 8)

16. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak! (Anton 4.10: 19abc)

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$