Matematika A4
Feladatok a Tematika 10. pontjához

Szabados Tamás kurzusa / Balázs Márton gyakorlata

Folytonos valószínűségi változók transzformációi

$y = a + bx$ egy lineáris transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(Y)$, akkor:

$$G(y) = \left\{ \begin{array}{cc} F(x) = F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b > 0 \\ 1 - F(x) = 1 - F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b < 0 \end{array} \right\}$$

$$g(y) = \frac{f(\frac{y-a}{b})}{|b|}$$

Általános eset: legyen $Y = t(X)$. Ha t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y))$$

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) \left[t^{-1}(y)\right]'$$

És az általános képlet, ha t monoton növő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \cdots + g_i(y)$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j. darabjából adódó sűrűségfüggvény.

És egy fontos dolog: ha X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye, akkor $F^{-1}(RND)$ értéke X-szel megegyező eloszlású. Ezt felhasználva generálhatunk tetszőleges eloszlású valószínűségi változót!

Feladatok:

1. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0, 1]$, egyébként 0.
   (a) Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Hogyan változott a várható érték?
2. Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszuk: fizetek neki $25^2 = 625$ forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!
3. Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg $x^{1/2}$, x^2, $x^{-1/2}$, x^{-1}, x^{-2} eloszlását.
4. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása? Hogyan tudnánk ilyen eloszlást gyártani a már meglévő eloszlásból?
5. Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz X^k eloszlása? Mi lesz az új várható érték?
6. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5, 8]$ intervallumon.
   (a) Számoljuk ki $|X - 6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
   (b) Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
7. Legyen X egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Y = \ln(X)$ sűrűségfüggvényét.
8. Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású $(-\pi/2, \pi/2)$-n. (*Az ilyen valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.*)

9. Legyen X egyenletes eloszlású az $(\alpha,\, \beta)$ intervallumon. Mi lesz $Z = aX + b$ eloszlása?
10. Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása? (Tipp: határozzuk meg és csodálkozzunk rá Z nevezetes sűrűségfüggvényére.)
11. Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (*Y eloszlását lognormálisnak nevezik.*) Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk az előző feladat eredményét.)

Egyéb transzformációk

1. A $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszögen vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!
2. A $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszögen vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!
3. Legyen (X,Y) eloszlás egyenletes az egységnégyzeten. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
4. Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
5. Vegyünk az egységkörlapon egyenletes eloszlást. Vetítsük a kapott pontokat az x-tengelyre. Adjuk meg a levetített pontok eloszlását! (Vigyázat! Ez nem az ArcSin-eloszlás lesz, mivel itt az egységkörlapon vettük az eloszlást, nem az egységkörön.)
6. Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású változók λ és μ paraméterekkel. Határozzuk meg $V = Y/X$ eloszlását, és számítsuk ki a $\mathbb{P}\{X < Y\}$ valószínűséget.
7. (X,Y) kétdimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye legyen a következő:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{64} & \text{ha } 0 \le x \le 4 \text{ és } 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   (a) Adjuk meg X eloszlását!
   (b) Tudjuk, hogy $X = 3$, adjuk meg Y eloszlását!
   (c) Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy 3 helyére egy változót írunk, azaz: tudjuk, hogy $X = x$, ahol $0 \le x \le 4$, adjuk meg Y eloszlását!
   (d) Mi lesz $X + Y$ eloszlása?
   (e) Mi lesz $X \cdot Y$ eloszlása?
8. Legyen X λ rátájú exponenciális valószínűségi változó. Határozzuk meg a $\mathbb{P}\{\lfloor X \rfloor = n,\ X - \lfloor X \rfloor \le x\}$ valószínűségeket, ahol $\lfloor a \rfloor$ az a alsó egészrészét jelöli, vagyis azt a legnagyobb egész számot, mely nem haladja meg a-t. Igaz-e, hogy $\lfloor X \rfloor$ és $X - \lfloor X \rfloor$ függetlenek?
9. Legyenek $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ független, (0, 1)-en azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg külön-külön $U := \max(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ illetve $V := \min(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ eloszlását, majd várható értékét.
10. Legyenek $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ függetlenek, ahol X_i exponenciális(λ_i) eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $U := \min(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ eloszlását.

Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \cap Y = l - k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X+Y=l)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=l-k)$$

Például ha X, Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$P(\text{dobások összege } = 8) = P(X=2)P(Y=6)+P(X=3)P(Y=5)+ \\ P(X=4)P(Y=4)+P(X=5)P(Y=3)+P(X=6)P(Y=2)$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.
Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

Feladatok:

1. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0, 1]$-en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!
2. Számoljuk ki egy $[0, 2]$-n és egy $[0, 3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.
3. Számítsuk ki két darab független 1 paraméterű Poisson eloszlás összegének eloszlását!
4. A binomiális eloszlás értelmezése alapján mutassuk meg, hogy egy binomiális(n, p) és egy tőle független binomiális(m, p) valószínűségi változó összege szintén binomiális, $n + m$ és p paraméterekkel.
5. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt nevezzük $GAM(\lambda, 2)$ eloszlásnak.)
6. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás különbségének eloszlását! (A számolásnál különböztessük meg, ha λ_1 és λ_2 különbözőek, illetve megegyeznek.
7. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!
8. Válasszunk 4 db pontot a $[0, 1]$-en egymástól függetlenül. A második legnagyobb pont helyét jelöljük X-szel. Mi lesz X eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye? És X^3-é?
9. Számoljuk ki 3 db λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! *Útmutatás:* Kettőre már kiszámoltuk, konvolváljunk az eredményhez még egy λ paraméterű exponenciális eloszlást.
10. * Számoljuk ki n db λ paraméterű exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! (Használjunk indukciót!)
11. X és Y egymástól független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak az $[1, 5]$ intervallumon. Vezessük le $X - Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!
12. Számoljuk ki $X - Y$ sűrűségfüggvényét, ha
    (a) X és Y egymástól független 2 paraméterű exponenciális eloszlás.
    (b) X λ paraméterű, Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.