Matematika A4
Feladatok a Tematika 12. pontjához

Szabados Tamás kurzusa / Balázs Márton gyakorlata

1. Számítsuk ki az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás standardizáltját $n \to \infty$ esetén $p = 0.4,\ p = 0.02$ illetve $p = 0.96$ esetekben.

2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12 000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?

3. Egy gyár adott típusú termékei egymástól függetlenül elfogadható minőségűek 0.95 valószínűséggel. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a következő 150 termékből legfeljebb 10 nem lesz elfogadható.

4. Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

5. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik, kb. 0.5.

6. Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nél nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

7. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz 'piros'-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

8. Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és X-szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy $X = 20$
   - a binomiális eloszlás segítségével,
   - a DeMoivre-Laplace tételt használva. Ez utóbbihoz segítség: $\mathbb{P}\{X = 20\} = \mathbb{P}\{19.5 \le X < 20.5\}$, ami persze nem számít amíg X-et binomiálisnak (azaz egész értékűnek) tekintjük, de fontos lesz a DeMoivre-Laplace tétel alkalmazásával.

9. Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal, a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A nagy számok törvényéből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empírikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti a az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empírikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűséggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Másszóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, melyre igaz, hogy hogy bármely $p \in (0,\, 1)$-re és $n \ge n_0$-ra
$$\mathbb{P}\{|p' - p| \le 0.005\} \ge 0.95.$$

10. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0,\, 30]$ intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a $[0,\, 1]$ intervallumon
    (a) egyenletes;
    (b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?

11. A pszichológia kurzusra beiratkozó diákok száma Poisson eloszlású, 100 várható értékkel. Annak valószínűsége, hogy legalább 120 diák veszi fel a pszichológiát
$$\mathbb{P}\{X \ge 120\} = \mathrm{e}^{-100} \sum_{i=120}^{\infty} \frac{(100)^i}{i!},$$

egy meglehetősen kellemetlen formula. Becsüljük meg ezt a valószínűséget a centrális határeloszlás tétel segítségével, felhasználva, hogy 100 darab, egymástól független 1 várható értékű Poisson valószínűségi változó összege épp egy 100 várható értékű Poisson eloszlású változó.

12. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 000 kockadobás összege 34 800 és 35 200 közé esik.

13. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.

14. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

15. Az 14. feladatban most tegyük fel, hogy minden égő kicserélése független, a $(0, 0.5)$ intervallumon egyenletes eloszlású ideig tart. Becsüljük meg most annak valószínűségét, hogy 550 óra elteltével már az összes égő kiégett.