

# Matematika A4

## Feladatok a Tematika 6. pontjához

Szabados Tamás kurzusa

### 1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?
2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0.6 valószínűséggel leveszem a polcra. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0.5 valószínűséggel kidobom az ablakon. Adjuk meg az ablakon kidobott könyvek számának eloszlását!
3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

| $X \setminus Y$ | 1   | 2   | 3   |
|-----------------|-----|-----|-----|
| 1               | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| 2               | 0.1 | 0.2 | 0   |
| 3               | 0.1 | 0   | 0.1 |

- a) Mi a valószínűsége, hogy  $X = 2$  és  $Y = 1$  ?
- b) Mi a valószínűsége, hogy  $Y = 3$ ?
- c)  $X^2Y$  várható értéke?
- d) Feltéve, hogy  $Y = 3$  mi  $X$  eloszlása?
- e) Független-e  $X$  és  $Y$ ?

### 2. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1.  $f(x, y) \geq 0$ , minden  $x, y$  valós számra.
- 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Az  $A$  tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x, y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha } x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha } 0 < y < x < 1$$

5. Határozzuk meg c-t úgy, hogy f(x,y) sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1$$

6. Vegyük az  $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$  függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

a)  $0 < X < 1$  és  $0 < Y < 1$

b)  $1 < X < 5$  és  $2 < Y < 8$

c)  $0 < X < 1$

d)  $3 < Y < 5$

### 3. 2-dimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A  $t(X, Y)$  valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy$$

*Feladatok:*

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:  
Első koordinátája legyen  $X = \sqrt{RND_1}$ . A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével:  $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$ .
- a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
  - b) Legyen  $t(x, y) = xy$ . Mennyi  $t(X, Y)$  valószínűségi változó várható értéke?
  - c) Legyen  $t(x, y) = xy^2$ . Mennyi  $t(X, Y)$  valószínűségi változó várható értéke?
8. Legyen  $X$  a  $[0, 1]$ -en egyenletes,  $Y$  pedig az  $[X, 1]$ -en egyenletes. Mi a közös sűrűségfüggvényük? Mi  $X$  várható értéke? Mi  $Y$  várható értéke? Mi a szorzatuk, azaz  $XY$  várható értéke? Igaz-e, hogy ez a várható értékek szorzata?