

Matematika A4

Feladatok a Tematika 7. pontjához

Szabados Tamás kurzusa

1. Feltételes eloszlás

A fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x) dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

9. Legyen $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

- a) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
- b) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
- c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
- d) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
- e) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
- f) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$

10. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

- a) $P(X + Y < 3) = ?$
- b) $P(X + Y < z) = ?$
- c) $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
- d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

2. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x, y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x, y) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x, y) = f_1(x)$$

11. Függetlenek-e az alábbi közös sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

- a) $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
- b) $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
- c) $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
- d) $f(x, y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

12. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 24xy, \text{ ha } 0 < x, 0 < y, x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?

b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 1, \text{ ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2(1 - x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$

b) Független-e X és Y?