

Matematika A4
Feladatok a Tematika 8. pontjához
Szabados Tamás kurzusa / Balázs Márton gyakorlata

1. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg

(a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$,

(b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

értékét.

2. Legyenek X_1, X_2, \dots független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y_n := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

várható értékét és szórását.

3. Egy kisváros négyzet alakú, mely négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló-szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

4. Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

5. A zsebemben levő 1, 2, 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

6. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} 60xy^2 & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

7. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2x}/x & , \text{ ha } 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq x, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

8. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y+x)/y} & , \text{ ha } x > 0, y > 0, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.

9. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n -szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

10. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$ -t. Függetlenek-e X és Y ?

11. Legyenek X_1, X_2, \dots független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással, és legyen $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n+j})$ értékét minden $j \geq 0$ -ra.

12. Ha X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

(a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

(b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

korrelációs együtthatóját.

13. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játszik: az A játékos dob egy kockával, azután a B játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen

$$X := \begin{cases} 1 & , \text{ ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & , \text{ egyébként,} \end{cases} \quad Y := \begin{cases} 1 & , \text{ ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy X és Y pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

- 14*. Egy *gráf csúcsokból*, és a csúcsokat összekötő *élekből* áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n -ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1 - p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

(a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

(b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i -t mint az i -ből induló, de nem j -be érkező élek számát, és I_{ij} -t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i -t és D_j -t az X_i , X_j , és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)

15. Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ -t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ -t használnunk?

16. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$\varrho(X, Y) = \begin{cases} +1 & , \text{ ha } a > 0, \\ -1 & , \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

17. Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z, Z^2)$?

18. Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy

$$\varrho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

19. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.