

Brown-mozgás konstrukció

Gábor Attila
Herein András
Incze Attila
Sebők Béla

Brown-mozgás definíció

1. $B(t)$ független növekményű:

$$s_1 < t_1 < s_2 < t_2 \dots \text{ -re}$$

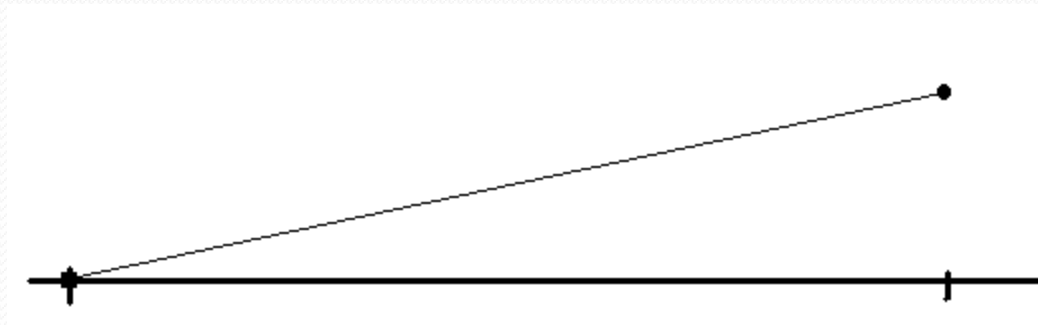
$B(t_i) - B(s_i)$ függetlenek

2. $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$

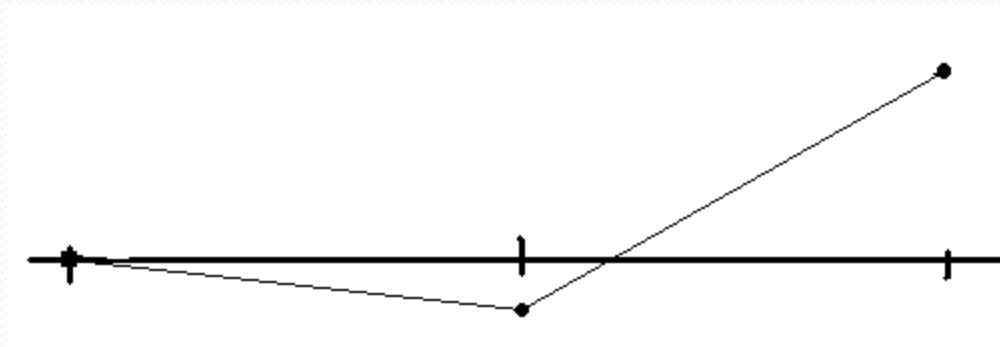
3. 1 valószínűséggel folytonos

4. $B(0) = 0$

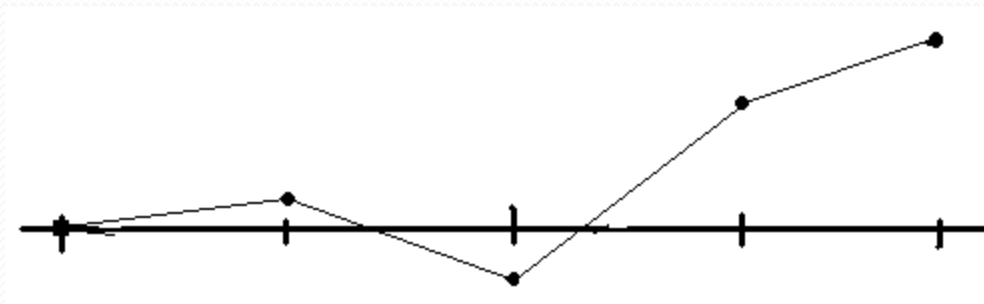
Konstrukció – a lényeg



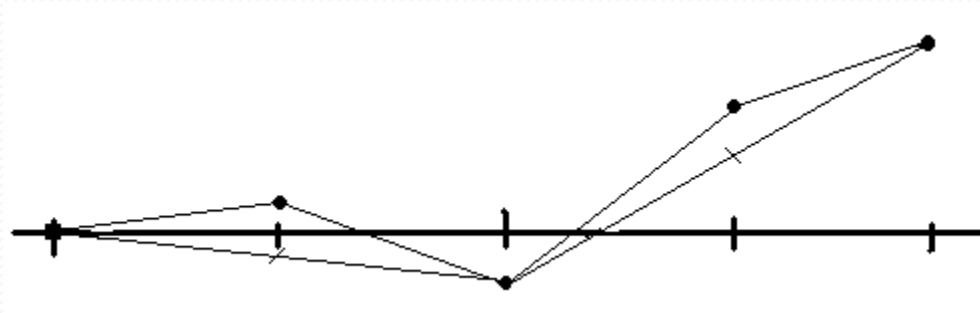
Konstrukció – a lényeg



Konstrukció – a lényeg



Konstrukció – a lényeg



Független növekmények

- **Lemma:**

$X(s)$ és $X(t)$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn

$X(t)-X(s) \sim N(0, t-s)$, akkor:

létezik $X\left(\frac{t+s}{2}\right)$

amire:
$$X\left(\frac{t+s}{2}\right) - X(s) \stackrel{d}{=} X(t) - X\left(\frac{t+s}{2}\right)$$

Független növekmények

- **Lemma:**

$X(s)$ és $X(t)$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn

$X(t) - X(s) \sim N(0, t-s)$, akkor:

létezik $X\left(\frac{t+s}{2}\right)$

amire:

$$\underbrace{X\left(\frac{t+s}{2}\right) - X(s)}_{N(0, \frac{t-s}{2})} \stackrel{d}{=} \underbrace{X(t) - X\left(\frac{t+s}{2}\right)}_{N(0, \frac{t-s}{2})} \text{ és függetlenek}$$

Lemma bizonyítása

- Legyen: $U := X(t) - X(s)$ és tőle független $V \sim N(0, t-s)$
- Legyen $X\left(\frac{t+s}{2}\right)$ úgy, hogy:

$$X(t) - X\left(\frac{t+s}{2}\right) = \frac{U+V}{2} \quad \text{és} \quad X\left(\frac{t+s}{2}\right) - X(s) = \frac{U-V}{2}$$

Lemma bizonyítása

- Legyen: $U := X(t) - X(s)$ és tőle független $V \sim N(0, t-s)$
- Legyen $X\left(\frac{t+s}{2}\right)$ úgy, hogy:

$$X(t) - X\left(\frac{t+s}{2}\right) = \underbrace{\frac{U+V}{2}}_{N(0, \frac{t-s}{2})} \quad \text{és} \quad X\left(\frac{t+s}{2}\right) - X(s) = \underbrace{\frac{U-V}{2}}_{N(0, \frac{t-s}{2})}$$

Lemma bizonyítása

- Legyen: $U := X(t) - X(s)$ és tőle független $V \sim N(0, t-s)$
- Legyen $X\left(\frac{t+s}{2}\right)$ úgy, hogy:

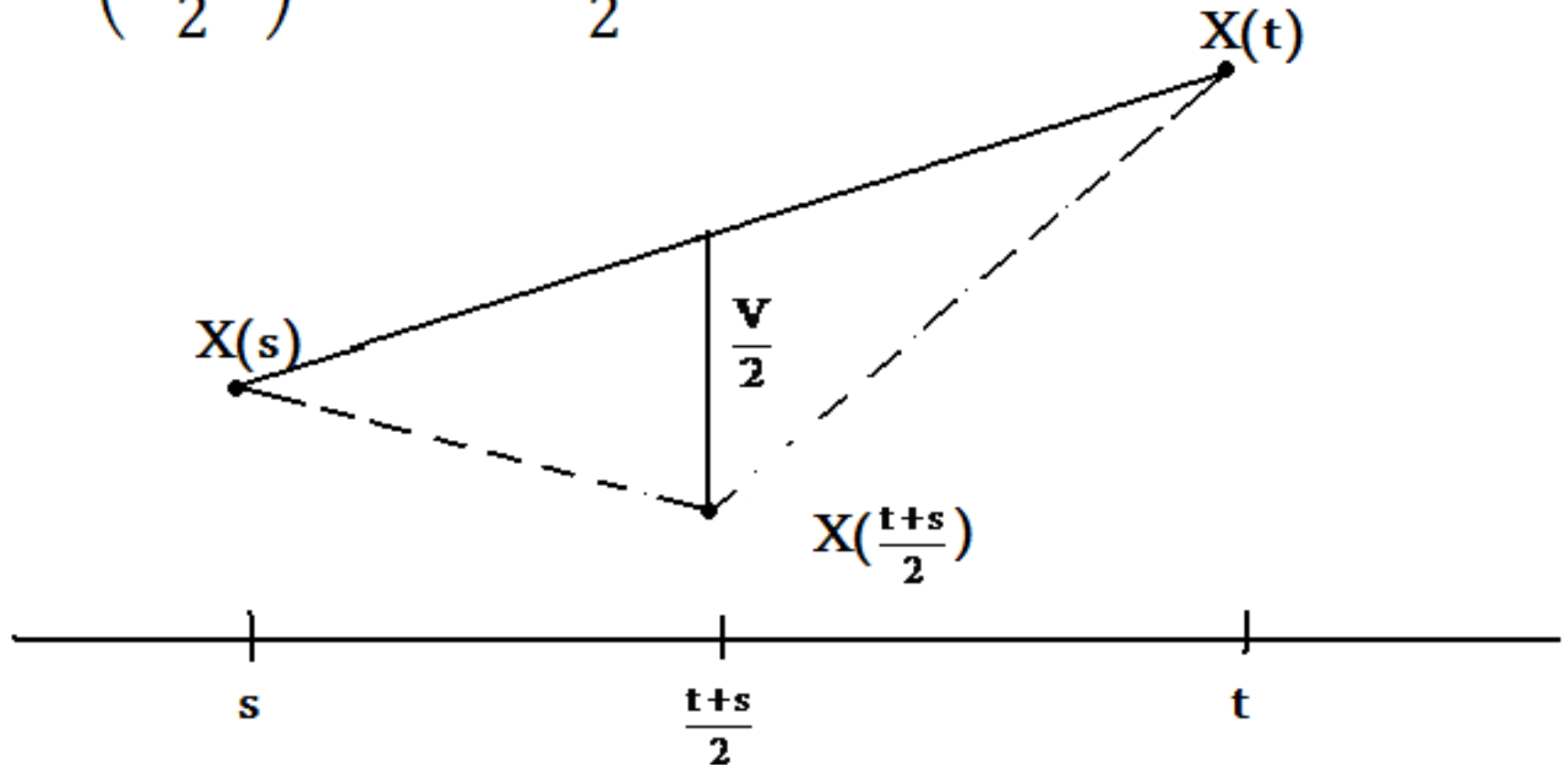
$$X(t) - X\left(\frac{t+s}{2}\right) = \underbrace{\frac{U+V}{2}}_{N(0, \frac{t-s}{2})} \quad \text{és} \quad X\left(\frac{t+s}{2}\right) - X(s) = \underbrace{\frac{U-V}{2}}_{N(0, \frac{t-s}{2})}$$

- Függetlenek, ha a kovariancia eltűnik:

$$\text{cov}(U+V, U-V) = \text{cov}(U, U) - \text{cov}(V, V) + \text{cov}(U, V) - \text{cov}(V, U) = 0$$

Az osztóponton:

$$X\left(\frac{t+s}{2}\right) = \frac{X(t) + X(s) - V}{2}$$



Brown-mozgás a $[0,1]$ intervallumon

- Vegyünk egy valószínűségi mezőt és rajta független valószínűségi változókat:

$$V(1), V\left(\frac{1}{2}\right), V\left(\frac{1}{4}\right), V\left(\frac{3}{4}\right) \dots$$

- n osztópont $\rightarrow 2^n$ db val.vált.

$$\left\{ V\left(\frac{k}{2^n}\right); k = 1, 2, \dots, 2^n; n \geq 1 \right\}$$

- Az eloszlásuk:

(diadikus osztópontok)

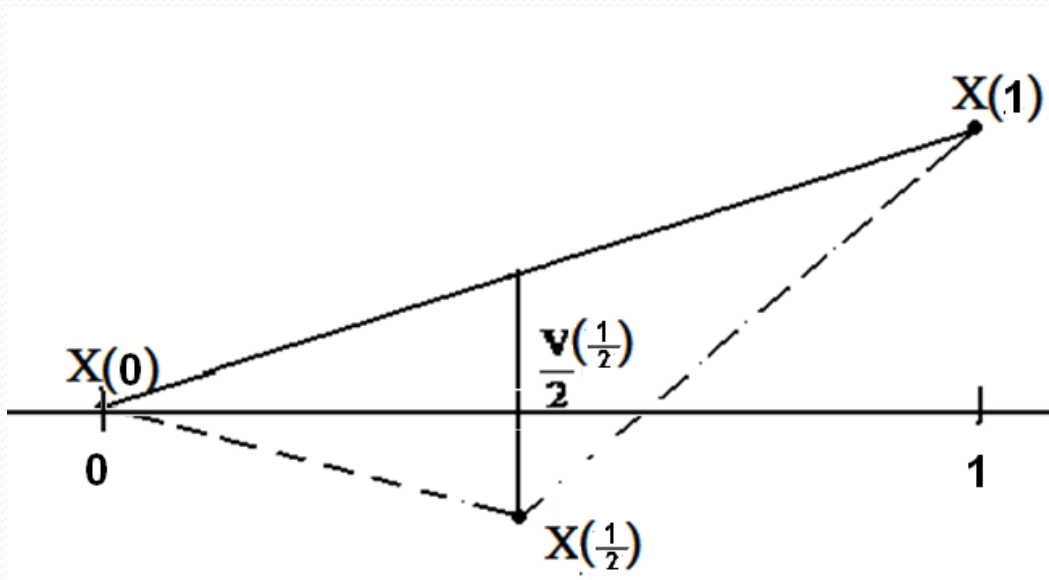
$$V\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$$

Brown-mozgás konstruálása

- Legyen $X(0) = 0$ és $X(1) = V(1)$
- $X\left(\frac{1}{2}\right)$ -hez használjuk $V\left(\frac{1}{2}\right)$ -t a lemma alapján,

$$X\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{X(0) + X(1) - V\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

- így $X(1) - X\left(\frac{1}{2}\right)$ és $X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0)$ eloszlása: $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$

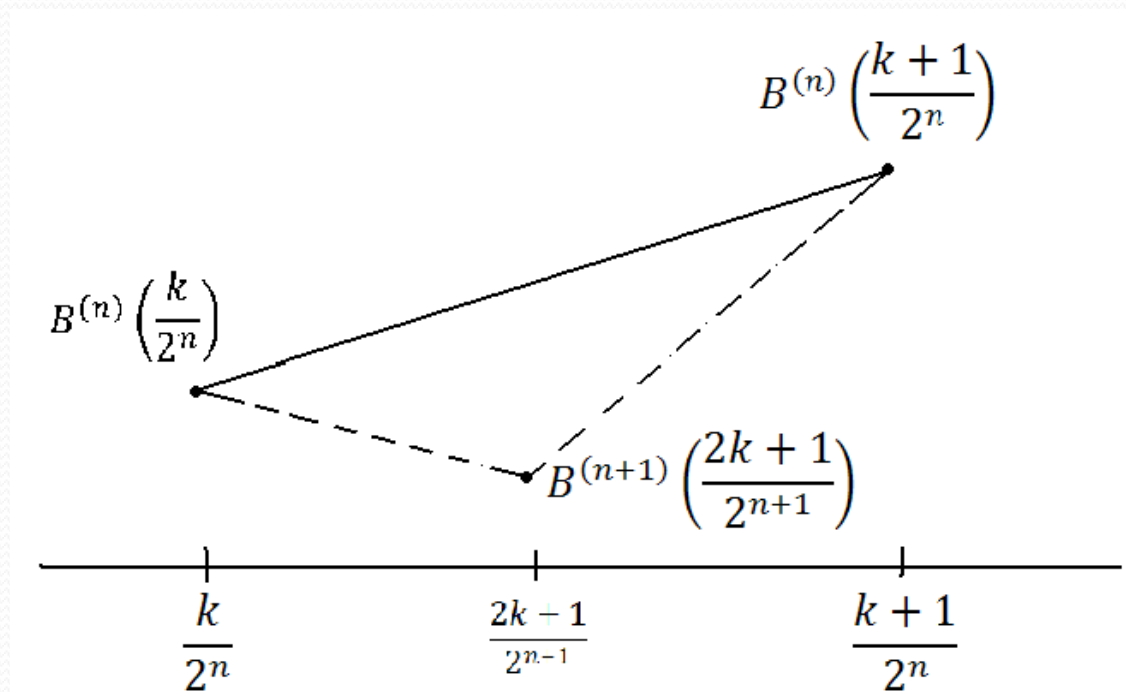


Folyamat definiálása

- Minden $n=1,2,\dots$ -ra alkossunk egy folyamatot: $\{B^{(n)}(t), t \geq 0\}$

$$B^{(n)}(t) = X(t) \quad t \in \left\{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n\right\}$$

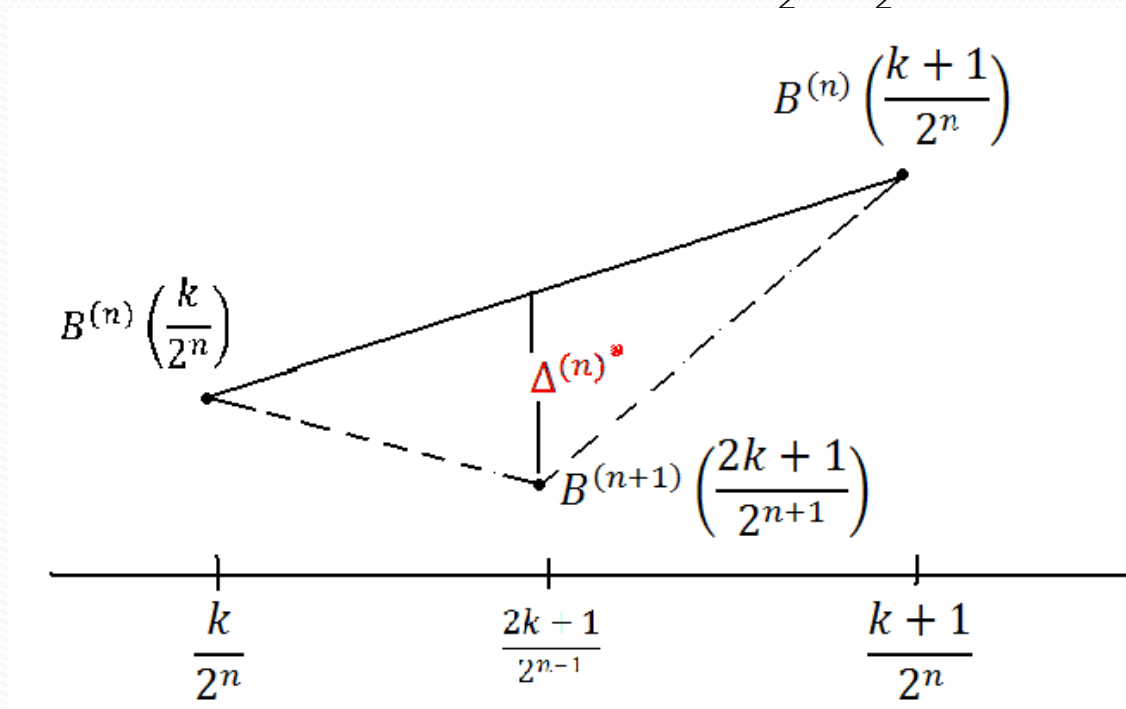
és a köztes helyeken lineáris



Az eltérés az n . és $n+1$. lépés között

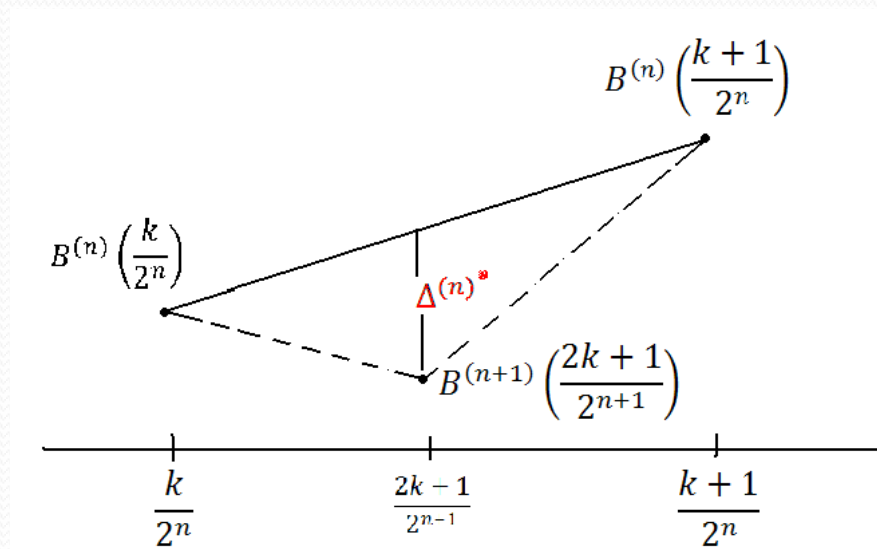
- Kell még egy mérőszám, mennyire finomodik

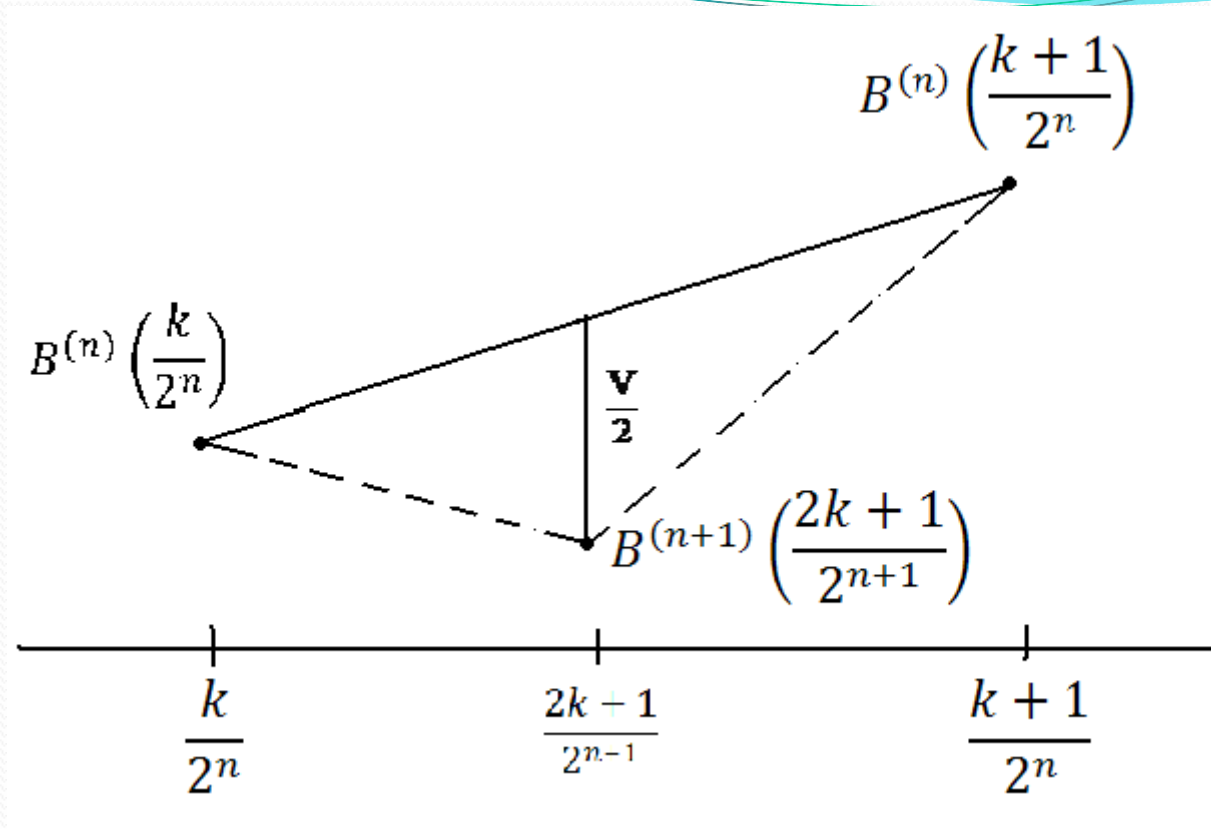
$$\Delta^{(n)} = \max_{0 \leq t \leq 1} |B^{(n+1)}(t) - B^{(n)}(t)| = \max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} \max_{\frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n}} |B^{(n+1)}(t) - B^{(n)}(t)|$$



Az eltérés az n . és $n+1$. lépés között

$$\max_{\frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n}} |B^{(n+1)}(t) - B^{(n)}(t)| = \left| \frac{B^{(n+1)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) + B^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right)}{2} - B^{(n+1)}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \right| =$$





$$\Delta^{(n)} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} \left| V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \right|$$

$$V\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$$

Konvergencia

$$\sum_n P\left[\Delta^{(n)} > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2^n}}\right] \leq \sum_n c\left(\frac{2}{e^2}\right)^n < \infty$$

Borel-Cantelli Lemma:

Ha végtelen sok esemény valószínűsége összegezhető, akkor az események közül egy valószínűséggel csak véges sok következik be

Elég nagy n -re:

$$P\left[\Delta^{(n)} > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2^n}}\right] = 0 \qquad \Delta^{(n)} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2^n}}$$

Konvergenca

$$\Delta^{(n)} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2^n}}$$

Ebből következik:
$$\sum_n \Delta^{(n)} < \infty$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |B^{(n)}(t) - B^{(m)}(t)| \leq \Delta^{m+1} + \dots + \Delta^n \rightarrow 0$$

tehát Cauchy-sorozatot alkot

$$|B^{m+2} - B^m|_{\sup} = |B^{m+2} - B^{m+1} + B^{m+1} - B^m|_{\sup} \leq |B^{m+2} - B^{m+1}|_{\sup} + |B^{m+1} - B^m|_{\sup} = \Delta^{m+1} + \Delta^m$$

Mivel $C[0,1]$ teljes metrikus tér, ezért 1 valószínűséggel létezik a határértékük:

$$B = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)} & \text{ha létezik} \\ = 0 & \text{ha nem létezik (p=0)} \end{cases}$$

B tulajdonságai

- $B(0)=0$
- B folytonos, mivel $B^{(n)}$ -ek is folytonosak
- Növekmények $N(0, t-s)$

$$B(t) - B(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)}\left(\frac{\lfloor t2^n \rfloor}{2^n}\right) - B^{(n)}\left(\frac{\lfloor s2^n \rfloor}{2^n}\right)$$

- Független növekményűek, mivel $B^{(n)}$ -ek is azok



Köszönöm a
figyelmet!

Általánosan

- ha adottak $\left\{X\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n\right\}$

Konstruáljuk meg az osztópontokon $X\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ -eket a $V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ felhasználásával.

- Ekkor a lemma szerint:

$$X\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - X\left(\frac{k}{2^n}\right) \stackrel{d}{=} X\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

->független növekményűség

$$\left\{X\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right), 0 \leq k \leq 2^{n+1}\right\}$$

