

MATEMATIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ GYAKORLAT

Ergodelmélet

Dávid Szabolcs
Papp Dániel
Stippinger Marcell

2009.12.11

□ Definíció:

- A T endomorfizmust ergodikusnak nevezzük, ha bármely $f \in L_2$ függvényre $\bar{f} = \text{const}$. (Miután általában az L_p -függvények csak μ -m.m. értelmezettek, azért ezek egyenlőségéről is csak ilyen értelemben beszélünk). Innen azonnal következik, hogy T csak akkor ergodikus, ha minden invariáns függvény konstans.

□ Lemma:

- Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus csak akkor ergodikus, ha minden invariáns halmaz triviális, azaz mértéke 0 vagy 1.

□ Definíció:

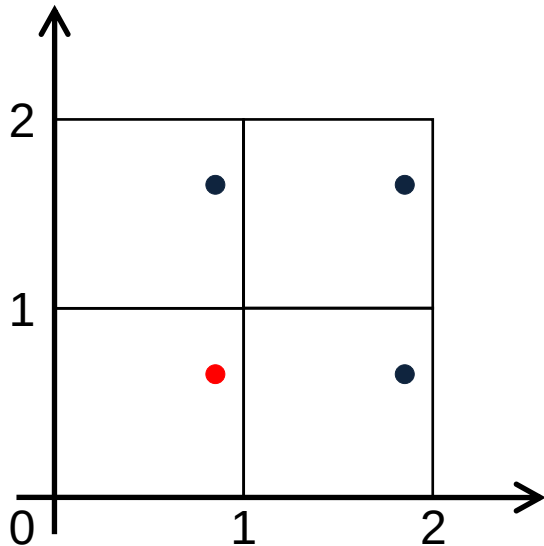
- Az (S^d, F, μ, T) automorfizmust csoport-automorfizmusnak nevezzük, ha:
- (i) T és T^{-1} folytonosak,
- (ii) $\forall x, y \in S^d$ -re $T(x + y) = Tx + Ty$.
- Legyen $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$ egész elemű mátrix, amelyre $|\det A| = 1$

□ Lemma:

- S^d -nek a $Tx \equiv Ax \pmod{\mathbb{Z}^d}$ reláció által értelmezett automorfizmusa csoport-automorfizmus.

□ Lemma folyt.:

- Jelölje általában az $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ $x \in S^d$ elem valamely felemeltjét.
- $|\det A| = 1$ miatt A^{-1} létezik, sőt elemei egészek, tehát T jól értelmezett és a Lebesgue-mérték invariáns. $T(x + y) \equiv A(x + y) = Ax + Ay \equiv Tx + Ty$, ahol $a \equiv$ kongruencia mindig $(\text{mod } \mathbb{Z}^d)$.



□ Definíció:

- A $\chi: S^d \rightarrow \mathbb{C}$ nem azonosan eltűnő, folytonos függvényt karakternek nevezzük, ha $\forall x, y \in S^d$ – re $\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y)$.
- Következmények:
- (i) Az összes karakter ilyen alakú: $\chi_n(x) = \exp(2\pi i(n, x))$ ahol $n \in \mathbb{Z}^d$ (ezek ugyanis a Cauchy-függvényegyenlet folytonos megoldásai).
- (ii) Az $\hat{S}^d := \{\chi_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ csoportot duális csoportnak nevezzük
- (iii) $\hat{S}^d$ –n is tekinthetjük az indukált leképezést: $\chi \in S^d$ –re $(\hat{T}\chi)(x) := \chi(Tx)$
- $\hat{T}\chi$ valóban karakter, mert $(\hat{T}\chi)(x + y) = \chi(T(x + y)) = \chi(Tx)\chi(Ty) = (\hat{T}\chi)(x)(\hat{T}\chi)(y)$

□ Tétel:

- A tórusz T algebrai automorfizmusa csak akkor keverő, ha $\forall \chi (\text{nem } \equiv 1) \in S^d$ karakterre a $\{(\hat{T}\chi)^k \chi : k \in \mathbb{Z}\}$ trajektória végtelen, azaz aperiódikus. Ebben az esetben T keverő is.

□ Elliptikus példa:

- Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Az egyenes fix pontokból áll, a többi pont periodikus, a periódus értéke 2, mert $T_A^2 = I$. A T_A térkép „megfordítja” a toruszt az $x = y$ főátló körül. Nincsenek sűrű pályák, így a leképezés nem ergodikus. Vegyük észre, hogy A sajátértékei: $\lambda = \pm 1$

□ Parabolikus példa:

- Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ahol $m \in \mathbb{Z}$. Az $y = 0$ egyenes fix pontokból áll. Minden $y = \text{const.}$ egyenes invariáns T_A -ra nézve. Nincsenek sűrű pályák, így a leképezés nem ergodikus. Vegyük észre, hogy A sajátértéke $\lambda = 1$, kétszeres multiplicitással.
- Amennyiben $T_{\text{or}^2} - t$ egy $\{(x, y) : 0 \leq x < 1, y = 0\}$ alapkörű, y függőleges koordinátájú hengerként képzeljük el, akkor az összes vízszintes $y = \text{const.}$ szeletet my szöggel elforgatja, hiszen a hozzárendelés: $x \mapsto x + my \pmod{1}$. Mivel magasabban van az elforgatott szelet, annál nagyobb az elforgatás szöge, így az egész henger felfele csavarodik. Az ilyen leképezéseket csavaró leképezéseknek nevezzük.

□ Definíció:

- A tórusznak az A mátrix által származtatott $(S^d, \mathbb{F}, \mu, T)$ automorfizmusát hiperbolikusnak nevezzük, ha $\text{spec } A \cap \{|z| = 1\} = \emptyset$

□ Tétel:

- Ha a T tórusz algebrai automorfizmusa hiperbolikus, akkor T ergodikus és keverő.

□ Tétel bizonyítás:

- Ha az A mátrix által származtatott T automorfizmus nem ergodikus, ha $\exists k \neq 0$ és $\exists n (\neq 0) \in \mathbb{Z}^d$ hogy $\left(\hat{T}\right)^k x_n = x_n$, vagyis $(A^*)^k n = n$. Ekkor természetesen A^* -nak és egyúttal A -nak van sajátértéke az egységkörön. Vagyis ha ez nincs így, akkor T ergodikus, sőt keverő.
- Pld. $d=2$ esetén mindkét sajátérték az egységkörön van, vagy mindkettő valós és egyikükre $|\lambda_s| < 1$, a másikra $|\lambda_u| > 1$ (s a stable, u az unstable szó kezdőbetűje).

□ Tétel:

- A tórusz hiperbolikus algebrai automorfizmusa ergodikus.

□ Biz.:

- Egyszerűség kedvéért legyen $d=2$ vagyis mindkét sajátérték valós és legyen $|\lambda_s| < 1$ $|\lambda_u| > 1$. Ebben az esetben A -nak vannak $\mathbb{R}^2$ -beli sajátvektorai: e_s és e_u . A bizonyítás fontos eszközei a szűkülő illetve táguló vonalak.

□ Definíció:

- A T leképezés ponton keresztül átmenő szűkülő (stabil) vagy táguló fonala

$$\gamma^s(x) = \left\{ y \in S^d : \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(T^n x, T^n y) = 0 \right\}$$

- És táguló (instabil fonala) $\gamma^u(x) = \left\{ y \in S^d : \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(T^n x, T^n y) = 0 \right\}$

- Valójában T stabil (instabil) fonala éppen a leképezés stabil (instabil) fonala. Esetünkben e fonalak könnyen leírhatóak:

$$\gamma^s(x) = \left\{ \tilde{x} + t e_s \pmod{Z^2} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \gamma^u(x) = \left\{ \tilde{x} + t e_u \pmod{Z^2} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Tehát ténylegesen mindkettő a tórusz e_s illetve e_u irányú feltekerésének pályája.

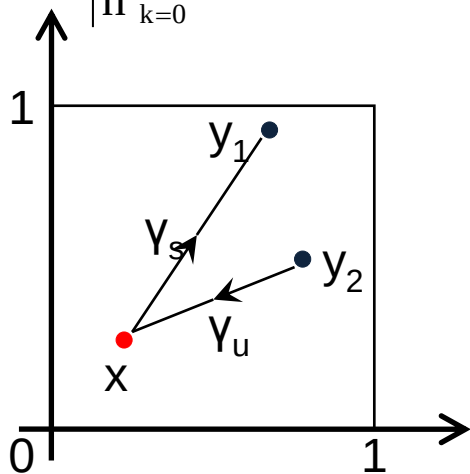
- Automorfizmusról lévén szó, hivatkozunk az ergodtételekre: egyrészt μ -m.m.
Esetén: $x \in S^2$ – re $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \left(f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x) \right) \rightarrow \bar{f}(x) \qquad \frac{1}{n} \left(f(x) + f(T^{-1}x) + \dots + f(T^{-n+1}x) \right) \rightarrow \bar{f}^-(x)$$

- $\bar{f}^- = \bar{f}$ -re áll μ – m.m. x -re. Jelöljük: $J := \{x \in S^2 : \bar{f}^-(x) = \bar{f}(x)\}$
- Mivel f egyenletesen is folytonos, igazak a következő megállapítások:
- 1.: Ha $x, y \in \gamma_s$ és $\bar{f}(x)$ létezik, akkor $\bar{f}(y)$ is létezik, és $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$
- 2.: Ha $x, y \in \gamma_s$ és $\bar{f}^-(x)$ létezik, akkor $\bar{f}^-(y)$ is létezik, és $\bar{f}^-(x) = \bar{f}^-(y)$

- f egyenletes folytonossága miatt $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ ha csak $\rho(x, x') < \delta$
- Mivel $\rho(T^k x, T^k y) \rightarrow 0$ ha $k \rightarrow \infty$ (valójában a konvergencia sebessége $|\lambda_s^k|$ vagyis exponenciális), ezért $\rho(T^k x, T^k y) < \delta$, ha $k \geq k_0$. Ekkor elég nagy n mellett:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(T^k x) - f(T^k y)) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{k_0-1} f(T^k x) - f(T^k y) + \sum_{k=k_0}^{n-1} f(T^k x) - f(T^k y) \right| \leq \frac{2 \max |f| k_0}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$



□ Források:

- Szász Domonkos: Dinamikai rendszerek
- Nikolai Chernov: Dynamical Systems



Köszönjük a figyelmet!