

A hullámgyenlet megoldása magasabb dimenziókban

Orbán Ágnes
Fábián Gábor
Kolozsi Zoltán

2009. október 29.

A hullámegyenlet

- ▶ Hullámegyenletnek nevezzük a következő lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = u_{tt} - \Delta u = 0, \quad + \text{ Perem és kezd. felt.} \quad (1)$$

ahol $t > 0$ és $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaznak.

A hullámegyenlet

- ▶ Hullámegyenletnek nevezzük a következő lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = u_{tt} - \Delta u = 0, \quad + \text{ Perem és kezd. felt.} \quad (1)$$

ahol $t > 0$ és $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaznak.

- ▶ Az ismeretlen az $u = u(x, t) : \overline{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

A hullámegyenlet

- ▶ Hullámegyenletnek nevezzük a következő lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = u_{tt} - \Delta u = 0, \quad + \text{ Perem és kezd. felt.} \quad (1)$$

ahol $t > 0$ és $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaznak.

- ▶ Az ismeretlen az $u = u(x, t) : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Rövidített formája az idő- és térkoordinátákon ható operátorok összevonásával:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = \square u = 0, \quad (2)$$

ahol $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ az ún. *d'Alembert-operátor*.

Az egydimenziós hullámegyenlet

A d'Alembert formula

- Az egydimenziós hullámegyenlet kezdeti érték problémája az $\mathbb{R}$ -en:

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-en} \\ u &= g, \quad u_t = h && \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-en,}\end{aligned}\tag{3}$$

ahol g és h az adott kezdőfeltételek.

Az egydimenziós hullámmegyenlet

A d'Alembert formula

- ▶ Az egydimenziós hullámmegyenlet kezdeti érték problémája az $\mathbb{R}$ -en:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-en} \\ u &= g, \quad u_t = h & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-en,} \end{aligned} \quad (3)$$

ahol g és h az adott kezdőfeltételek.

- ▶ Ezt a másodrendű egyenletet a következő átalakítással tudjuk megoldani:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (4)$$

Az egydimenziós hullámeqyenlet

A d'Alembert formula

- Az egydimenziós hullámeqyenlet kezdeti érték problémája az $\mathbb{R}$ -en:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-en} \\ u &= g, \quad u_t = h \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-en,} \end{aligned} \quad (3)$$

ahol g és h az adott kezdőfeltételek.

- Ezt a másodrendű egyenletet a következő átalakítással tudjuk megoldani:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (4)$$

- Ebből kiindulva a kezdeti feltételeket tartalmazó *d'Alembert formulához* jutunk. ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Gömbi megoldások

- A hullámegyenlet kezdeti érték feladata $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ -re $(n \geq 2, m \geq 2)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\text{-en} \\ u &= g, u_t = h & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\text{-en,} \end{aligned} \tag{6}$$

Gömbi megoldások

- ▶ A hullámegyenlet kezdeti érték feladata $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ -re ($n \geq 2, m \geq 2$):

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\text{-en} \\ u &= g, u_t = h & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\text{-en,} \end{aligned} \quad (6)$$

- ▶ Vezessük be az alábbi módon definiált integrálok felületi átlagát!

$$U(x; r, t) := \overline{\int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y)} = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u dS \quad (7)$$

Gömbi megoldások

- ▶ A hullámegyenlet kezdeti érték feladata $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ -re ($n \geq 2, m \geq 2$):

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\text{-en} \\ u &= g, u_t = h & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\text{-en,} \end{aligned} \quad (6)$$

- ▶ Vezessük be az alábbi módon definiált integrálok felületi átlagát!

$$U(x; r, t) := \overline{\int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y)} = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u dS \quad (7)$$

- ▶ A hullámegyenlet felhasználásával az alábbi, *Euler-Poisson-Darboux egyenlethez* jutunk:

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r &= 0 & \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)\text{-en} \\ U &= G, U_t = H & \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}\text{-en.} \end{aligned} \quad (8)$$

Euler-Poisson-Darboux egyenlet

- Számítsuk ki az U r szerinti deriváltjait!

$$U_r(x; r, t) = \overline{\frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy} \quad (9)$$

$$U_{rr}(x; r, t) = \overline{\int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS} + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \overline{\int_{B(x,r)} \Delta u dy} \quad (10)$$

Euler-Poisson-Darboux egyenlet

- Számítsuk ki az U_r szerinti deriváltjait!

$$U_r(x; r, t) = \overline{\frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy} \quad (9)$$

$$U_{rr}(x; r, t) = \overline{\int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS} + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \overline{\int_{B(x,r)} \Delta u dy} \quad (10)$$

- A hullámegyenlet értelmében $u_{tt} = \Delta u$, tehát:

$$U_r = \overline{\frac{r}{n} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy} = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy \quad (11)$$

Euler-Poisson-Darboux egyenlet

- Számítsuk ki az U_r szerinti deriváltjait!

$$U_r(x; r, t) = \overline{\frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy} \quad (9)$$

$$U_{rr}(x; r, t) = \overline{\int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS} + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \overline{\int_{B(x,r)} \Delta u dy} \quad (10)$$

- A hullámegyenlet értelmében $u_{tt} = \Delta u$, tehát:

$$U_r = \overline{\frac{r}{n} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy} = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy \quad (11)$$

- A hullámegyenlet segítségével így meghatároztuk U_{tt} -t, az Euler-Poisson-Darboux egyenlethez jutottunk!

$$(r^{n-1} U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \overline{\int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS} = r^{n-1} U_{tt} \quad (12)$$

Megoldás $n=3$ -ra I

- ▶ A megoldáshoz tervünk, hogy az Euler-Poisson-Darboux egyenletet az 1D hullámegyenlet alakjára hozzuk!

Megoldás $n=3$ -ra I

- ▶ A megoldáshoz tervünk, hogy az Euler-Poisson-Darboux egyenletet az 1D hullámegyenlet alakjára hozzuk!
- ▶ $n = 3$ -ra tegyük fel, hogy $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ oldja meg az n dimenziós hullámegyenlet kezdeti érték feladatát (6).

Megoldás $n=3$ -ra I

- ▶ A megoldáshoz tervünk, hogy az Euler-Poisson-Darboux egyenletet az 1D hullámegyenlet alakjára hozzuk!
- ▶ $n = 3$ -ra tegyük fel, hogy $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ oldja meg az n dimenziós hullámegyenlet kezdeti érték feladatát (6).
- ▶ Vezessük be az alábbi függvényeket a korábban bevezetett U , G , H gömbfelületre vett átlagok segítségével:

$$\tilde{U} := rU, \quad \tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH, \quad (13)$$

mivel azt feltételezzük ezek megoldják az alábbi kezdeti érték problémát:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} &= 0 && \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)\text{-en} \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t &= \tilde{H} && \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}\text{-en} \\ \tilde{U} &= 0 && \{r = 0\} \times (0, \infty)\text{-en,} \end{aligned} \quad (14)$$

Megoldás n=3-ra II

- $\tilde{U}$ megoldja a (14) problémát (az E-P-D-egy. segítségével):

$$\tilde{U}_{tt} = r U_{tt} \stackrel{E-P-D}{=} r \left[U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right] = (U + r U_r)_r = \tilde{U}_{rr} \quad (15)$$

Megoldás $n=3$ -ra II

- $\tilde{U}$ megoldja a (14) problémát (az E-P-D-egy. segítségével):

$$\tilde{U}_{tt} = r U_{tt} \stackrel{E-P-D}{=} r \left[U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right] = (U + r U_r)_r = \tilde{U}_{rr} \quad (15)$$

- Tehát alkalmazzuk a d'Alembert formulát (5) a „radiális” hullámegyenletre (14), és $0 \leq r \leq t$ -re a következőt kapjuk:

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \quad (16)$$

Megoldás $n=3$ -ra II

- $\tilde{U}$ megoldja a (14) problémát (az E-P-D-egy. segítségével):

$$\tilde{U}_{tt} = r U_{tt} \stackrel{E-P-D}{=} r \left[U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right] = (U + r U_r)_r = \tilde{U}_{rr} \quad (15)$$

- Tehát alkalmazzuk a d'Alembert formulát (5) a „radiális” hullámegyenletre (14), és $0 \leq r \leq t$ -re a következőt kapjuk:

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \quad (16)$$

- A felületi átlag definíciójából $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(x; r, t)$, tehát:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} = \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = (tG(t))' + tH(t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(x, t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h dS \quad (17) \end{aligned}$$

A Kirchhoff egyenlet

- Az u -ra kapott (17) összefüggésben fejezzük ki a G_t -t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\int_{\partial B(0,1)} g(x + tz) dS(z)} \right) = \\ &= \overline{\int_{\partial B(0,1)} \mathcal{D}g(x + tz) \cdot z dS(z)} = \overline{\int_{\partial B(x,t)} \mathcal{D}g(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y)} \end{aligned} \quad (18)$$

A Kirchhoff egyenlet

- Az u -ra kapott (17) összefüggésben fejezzük ki a G_t -t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\int_{\partial B(0,1)} g(x + tz) dS(z)} \right) = \\ &= \overline{\int_{\partial B(0,1)} \mathcal{D}g(x + tz) \cdot z dS(z)} = \overline{\int_{\partial B(x,t)} \mathcal{D}g(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y)} \end{aligned} \quad (18)$$

- Ebből azt kapjuk, a kezdeti érték feladat megoldása a *Kirchhoff formula* ($x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$):

$$u(x, t) = \overline{\int_{\partial B(x,t)} [t \cdot h(y) + g(y) + \mathcal{D}g(y) \cdot (y - x)] dS(y)}. \quad (19)$$

Megoldás $n=2$ -re I

- Az $n = 2$ esetében nem találunk olyan egyszerű transzformációt, mint $n = 3$ -nál, ezért a problémát 3 dimenzióban oldjuk meg, a 3. helyváltozó kiküszöbölésével.

Tehát feltételezzük, hogy a megoldás $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ alakú, és bevezetjük $\bar{u}$ -t:

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t) \quad (20)$$

Megoldás $n=2$ -re I

- Az $n = 2$ esetében nem találunk olyan egyszerű transzformációt, mint $n = 3$ -nál, ezért a problémát 3 dimenzióban oldjuk meg, a 3. helyváltozó kiküszöbölésével.

Tehát feltételezzük, hogy a megoldás $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ alakú, és bevezetjük $\bar{u}$ -t:

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t) \quad (20)$$

- Ennek megfelelően a 2 dimenziós kezdeti feltételeket is terjesszük ki 3D-be. $g \rightarrow \bar{g}, h \rightarrow \bar{h}$

Megoldás $n=2$ -re I

- ▶ Az $n = 2$ esetében nem találunk olyan egyszerű transzformációt, mint $n = 3$ -nál, ezért a problémát 3 dimenzióban oldjuk meg, a 3. helyváltozó kiküszöbölésével.

Tehát feltételezzük, hogy a megoldás $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ alakú, és bevezetjük $\bar{u}$ -t:

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t) \quad (20)$$

- ▶ Ennek megfelelően a 2 dimenziós kezdeti feltételeket is terjesszük ki 3D-be. $g \rightarrow \bar{g}, h \rightarrow \bar{h}$
- ▶ Az így gyártott függvényekre az $n = 3$ dimenziós hullámegyenlet lesz érvényes (6).

Megoldás $n=2$ -re I

- Az $n = 2$ esetében nem találunk olyan egyszerű transzformációt, mint $n = 3$ -nál, ezért a problémát 3 dimenzióban oldjuk meg, a 3. helyváltozó kiküszöbölésével.

Tehát feltételezzük, hogy a megoldás $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ alakú, és bevezetjük $\bar{u}$ -t:

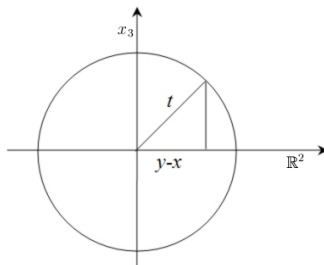
$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t) \quad (20)$$

- Ennek megfelelően a 2 dimenziós kezdeti feltételeket is terjesszük ki 3D-be. $g \rightarrow \bar{g}, h \rightarrow \bar{h}$
- Az így gyártott függvényekre az $n = 3$ dimenziós hullámegyenlet lesz érvényes (6).
- Az $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ és $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ jelöléssel a 3 dimenziós megoldás, (17) segítségével:

$$u(x, t) = \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{h} d\bar{S} \quad (21)$$

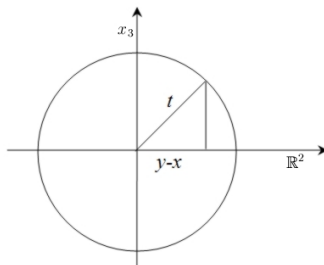
Megoldás $n=2$ -re II

- Az előbbi összefüggésben $\overline{B}(\overline{x}, t)$ az $\mathbb{R}^3$ -beli $\overline{x}$ középpontú, $t > 0$ sugarú gömböt jelöli, $\partial\overline{B}(\overline{x}, t)$ pedig ennek a 2 dimenziós felületét.



Megoldás $n=2$ -re II

- Az előbbi összefüggésben $\overline{B}(\bar{x}, t)$ az $\mathbb{R}^3$ -beli $\bar{x}$ középpontú, $t > 0$ sugarú gömböt jelöli, $\partial\overline{B}(\bar{x}, t)$ pedig ennek a 2 dimenziós felületét.



- Minket ezen gömbnek csak egy metszete érdekel, egy ilyen félkör paraméterezése: $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - |y - x|^2}, y \in B(x, t)$.

Megoldás $n=2$ -re III

- ▶ Fejtsük ki a (21)-ban megjelenő felületi átlagokat!

Megoldás $n=2$ -re III

- ▶ Fejtsük ki a (21)-ban megjelenő felületi átlagokat!
- ▶ Itt a $\partial B(x, t)$ körnek a „felületének” (kerületének) kiszámításához a $\sqrt{1 + |\mathcal{D}\gamma|^2}$ ívelemeket kell a felintegrálnunk 2-szer, mivel két félkörrel beszélünk.

Megoldás $n=2$ -re III

- ▶ Fejtsük ki a (21)-ban megjelenő felületi átlagokat!
- ▶ Itt a $\partial B(x, t)$ körnek a „felületének” (kerületének) kiszámításához a $\sqrt{1 + |\mathcal{D}\gamma|^2}$ ívelemeket kell a felintegrálnunk 2-szer, mivel két félkörrel beszélünk.
- ▶ Az ívelem:

$$\sqrt{1 + |\mathcal{D}\gamma|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}.$$

Megoldás $n=2$ -re III

- ▶ Fejtsük ki a (21)-ban megjelenő felületi átlagokat!
- ▶ Itt a $\partial B(x, t)$ körnek a „felületének” (kerületének) kiszámításához a $\sqrt{1 + |\mathcal{D}\gamma|^2}$ ívelemeket kell a felintegrálnunk 2-szer, mivel két félkörrel beszélünk.

- ▶ Az ívelem:

$$\sqrt{1 + |\mathcal{D}\gamma|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}.$$

- ▶ Tehát:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \\ &= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x, t)} g(y) \sqrt{1 + |\mathcal{D}\gamma(y)|^2} dy = \quad (22) \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy = \frac{t}{2} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \end{aligned}$$

Megoldás $n=2$ -re IV

- A kifejtett alakot írjuk be az $u(x, t)$ -re kapott képletbe!

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \quad (23)$$

Megoldás $n=2$ -re IV

- A kifejtett alakot írjuk be az $u(x, t)$ -re kapott képletbe!

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \quad (23)$$

- Paraméterezzük át az I. tagot!

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) \quad (24)$$

Megoldás $n=2$ -re IV

- A kifejtett alakot írjuk be az $u(x, t)$ -re kapott képletbe!

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy \quad (23)$$

- Paraméterezzük át az I. tagot!

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} dz \right) \quad (24)$$

- Az előbb kapott kifejezés alapján az I. tag:

$$\begin{aligned} \text{I. tag} &= \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} dz + t \int_{B(0,1)} \frac{\mathcal{D}g(x+tz) \cdot z}{\sqrt{1-|z|^2}} dz = \\ &= t \int_{B(x,t)} \frac{g(y) + \mathcal{D}g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy. \end{aligned} \quad (25)$$

A Poisson egyenlet

- Tehát ezekből a a hullámegyenlet kétdimenziós kezdeti érték problémájának megoldásához, a *Poisson formulához* jutunk:
 $(x \in \mathbb{R}^2, t > 0)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t \mathcal{D}g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \quad (26)$$

A Poisson egyenlet

- ▶ Tehát ezekből a a hullámegyenlet kétdimenziós kezdeti érték problémájának megoldásához, a *Poisson formulához* jutunk:
($x \in \mathbb{R}^2, t > 0$)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t \mathcal{D}g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \quad (26)$$

- ▶ Az alkalmazott megoldási módszer neve: *Ereszkedés módszer*
(*Method of descent*)

Kitekintés

A hullámegyenlet megoldása magasabb dimenziókban

- ▶ Az 3 és 2 dimenziós esethez hasonlóan $n \geq 3$ esetekre is az *Euler-Poisson-Darboux egyenletre* fogjuk visszavezetni az egyenleteinket.

Kitekintés

A hullámegyenlet megoldása magasabb dimenziókban

- ▶ Az 3 és 2 dimenziós esethez hasonlóan $n \geq 3$ esetekre is az *Euler-Poisson-Darboux egyenletre* fogjuk visszavezetni az egyenleteinket.
- ▶ Páros dimenziók esetén az előbbi példához hasonlóan eggyel magasabb (páratlan) dimenzióban oldjuk meg a problémát és „ereszkedünk le” az általunk érdekelt páros dimenzióba.

Konklúzió

- ▶ Páros n esetén a megoldáshoz g -t és h -t a teljes $B(x, t)$ -n ismerni kell, nem elég $\partial B(x, t)$ -n

Konklúzió

- ▶ Páros n esetén a megoldáshoz g -t és h -t a teljes $B(x, t)$ -n ismerni kell, nem elég $\partial B(x, t)$ -n
- ▶ Ha $n \geq 3$ páratlan, akkor g és h egy adott x pontban a megoldást csak a $c = \{(y, t) | t > 0, |x - y| < t\}$ kúp határán $\{(y, t) | t > 0, |x - y| = t\}$ befolyásolják. Páros n esetén viszont g és h a teljes kúpban hatnak u -ra.

Konklúzió

- ▶ Páros n esetén a megoldáshoz g -t és h -t a teljes $B(x, t)$ -n ismerni kell, nem elég $\partial B(x, t)$ -n
- ▶ Ha $n \geq 3$ páratlan, akkor g és h egy adott x pontban a megoldást csak a $c = \{(y, t) | t > 0, |x - y| < t\}$ kúp határán $\{(y, t) | t > 0, |x - y| = t\}$ befolyásolják. Páros n esetén viszont g és h a teljes kúpban hatnak u -ra.
- ▶ Más szavakkal:
az x -ből terjedő zavar egy éles hullámfronton terjed páratlan dimenzióban, de párosban a hullámfront áthaladása után is lesz hatása.

Konklúzió

- ▶ Páros n esetén a megoldáshoz g -t és h -t a teljes $B(x, t)$ -n ismerni kell, nem elég $\partial B(x, t)$ -n
- ▶ Ha $n \geq 3$ páratlan, akkor g és h egy adott x pontban a megoldást csak a $c = \{(y, t) | t > 0, |x - y| < t\}$ kúp határán $\{(y, t) | t > 0, |x - y| = t\}$ befolyásolják. Páros n esetén viszont g és h a teljes kúpban hatnak u -ra.
- ▶ Más szavakkal:
az x -ből terjedő zavar egy éles hullámfronton terjed páratlan dimenzióban, de párosban a hullámfront áthaladása után is lesz hatása.
- ▶ Irodalom:
Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations
American Mathematical Society, 1998

Köszönjük a figyelmet!