

2009-10-30

Kompaktság metrikus terekben

Kovács Noémi, Lencsés Máté, Pócza Tamás, Stelczer Gábor

2009. november 3.

Bevezetés, topologikus terek, metrikus terek

Topologikus terek

Metrikus terek

Tételek, biz. nélkül

Kompaktság metrikus terekben

Teljes korlátosság

Teljes korlátosság következményei

Teljes korlátosság és kompaktság kapcsolata

Arzela tétele

Definíciók

Arzela tétele

Topologikus terek

- ▶ *Topologikus tér*: nyílt halmazok adottak (teljesítik a megfelelő követelményeket).

Topologikus terek

- ▶ *Topologikus tér*: nyílt halmazok adottak (teljesítik a megfelelő követelményeket).
- ▶ Egy halmaz *kompakt*, ha tetszőleges nyílt fedéséből választható véges fedés.

Metrikus terek

- ▶ Az (X, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha ρ az X halmaz elemeiből vett (x, y) párok nemnegatív valós függvénye, és $\forall x, y, z \in X$ -re teljesülnek: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ és $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Metrikus terek

- ▶ Az (X, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha ρ az X halmaz elemeiből vett (x, y) párok nemnegatív valós függvénye, és $\forall x, y, z \in X$ -re teljesülnek: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ és $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- ▶ A metrika természetes módon topológiát határoz meg (nyílt gömbök).

Metrikus terek

- ▶ Az (X, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha ρ az X halmaz elemeiből vett (x, y) párok nemnegatív valós függvénye, és $\forall x, y, z \in X$ -re teljesülnek: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ és $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- ▶ A metrika természetes módon topológiát határoz meg (nyílt gömbök).
- ▶ Egy halmaz *prekompakt* ha lezárása kompakt.

Metrikus terek

- ▶ Az (X, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha ρ az X halmaz elemeiből vett (x, y) párok nemnegatív valós függvénye, és $\forall x, y, z \in X$ -re teljesülnek: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ és $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- ▶ A metrika természetes módon topológiát határoz meg (nyílt gömbök).
- ▶ Egy halmaz *prekompakt* ha lezárása kompakt.
- ▶ Egy tér *sorozatkompakt*, ha minden végtelen sok elemű részhalmazának van torlódási pontja.

Metrikus terek

- ▶ Az (X, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha ρ az X halmaz elemeiből vett (x, y) párok nemnegatív valós függvénye, és $\forall x, y, z \in X$ -re teljesülnek: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ és $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- ▶ A metrika természetes módon topológiát határoz meg (nyílt gömbök).
- ▶ Egy halmaz *prekompakt* ha lezárása kompakt.
- ▶ Egy tér *sorozatkompakt*, ha minden végtelen sok elemű részhalmazának van torlódási pontja.
- ▶ Egy metrikus tér *teljes*, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz van torlódási pontja.

Tételek, biz. nélkül

- ▶ Ha egy tér kompakt, akkor sorozatkompakt.

Tételek, biz. nélkül

- ▶ Ha egy tér kompakt, akkor sorozatkompakt.
- ▶ Teljes metrikus térben vegyünk egy zárt halmazokból álló $A_{n+1} \subset A_n$ halmazsorozatot. Ekkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ metszethalmaz nem üres, és egyetlen pontból áll.

Teljes korlátosság

- ▶ Legyen $R = (X, \rho)$ metrikus tér, $M \subset X$, ε pedig tetszőleges pozitív szám. Egy $A \subset X$ halmazt M ε -hálójának nevezzük, ha $\forall x \in M$ -hez $\exists a \in A$, melyre $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.

Teljes korlátosság

- ▶ Legyen $R = (X, \rho)$ metrikus tér, $M \subset X$, ε pedig tetszőleges pozitív szám. Egy $A \subset X$ halmazt M ε -hálójának nevezzük, ha $\forall x \in M$ -hez $\exists a \in A$, melyre $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.
- ▶ Az M halmazt *teljesen korlátosnak* nevezzük, ha tetszőleges, pozitív ε számhoz létezik véges elemű ε -háló.

Teljes korlátosság

- ▶ Legyen $R = (X, \rho)$ metrikus tér, $M \subset X$, ε pedig tetszőleges pozitív szám. Egy $A \subset X$ halmazt M ε -hálójának nevezzük, ha $\forall x \in M$ -hez $\exists a \in A$, melyre $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.
- ▶ Az M halmazt *teljesen korlátosnak* nevezzük, ha tetszőleges, pozitív ε számhoz létezik véges elemű ε -háló.
- ▶ Példa: A sík egész koordinátájú pontjai $\sqrt{2}/2$ -hálót alkotnak.

Példa nem teljesen korlátos halmazra

- Tekinsük l_2 -t, azaz az olyan sorozatokat, melyekre:
 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$. Metrika: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$.
Megmutatható, hogy ez „jó” metrika.

Példa nem teljesen korlátos halmazra

- ▶ Tekinsük l_2 -t, azaz az olyan sorozatokat, melyekre:
 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$. Metrika: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$.
Megmutatható, hogy ez „jó” metrika.
- ▶ Vegyük l_2 -n az S egységgömböt (ami nyilván korlátos).
Legyen $e_n \in l_2$ az a sorozat, melynek minden eleme 0, kivéve az n -edik, ami 1. Ezen pontok rajta vannak S -en, tetszőleges $n \neq m$ -ra $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}$. Ebből látható, hogy tetszőleges $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ -re már nem adható meg véges elemű ε -háló, így l_2 egységgömbje nem teljesen korlátos.

Teljes korlátosság következményei (nem bizonyítjuk)

- ▶ Teljesen korlátos halmaz korlátos.

Teljes korlátosság következményei (nem bizonyítjuk)

- ▶ Teljesen korlátos halmaz korlátos.
- ▶ Teljesen korlátos halmaz lezárása is az.

Teljes korlátosság következményei (nem bizonyítjuk)

- ▶ Teljesen korlátos halmaz korlátos.
- ▶ Teljesen korlátos halmaz lezárása is az.
- ▶ Teljesen korlátos térben a sorozatkompaktság és a kompaktság ekvivalensek (Ez fontos lesz!!).

Teljes korlátosság és kompaktság kapcsolata

- Az előadás legfontosabb tétele: Egy (X, ρ) metrikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha egyedejűleg teljesünek a következő feltételek: 1. (X, ρ) teljesen korlátos és 2. (X, ρ) teljes.

Teljes korlátosság és kompaktság kapcsolata

- ▶ Az előadás legfontosabb tétele: Egy (X, ρ) metrikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha egyedejűleg teljesünek a következő feltételek: 1. (X, ρ) teljesen korlátos és 2. (X, ρ) teljes.
- ▶ Bizonyítás ($\Rightarrow$ 1.): Fedjük le a teret ε sugarú nyílt gömbökkel. A tér kompaktsága miatt ebből választható véges fedés. Ekkor a kiválasztott gömbök középpontjai ε -hálót alkotnak.

Teljes korlátosság és kompaktság kapcsolata

- ▶ Az előadás legfontosabb tétele: Egy (X, ρ) metrikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha egyedejűleg teljesünek a következő feltételek: 1. (X, ρ) teljesen korlátos és 2. (X, ρ) teljes.
- ▶ Bizonyítás ($\Rightarrow$ 1.): Fedjük le a teret ε sugarú nyílt gömbökkel. A tér kompaktsága miatt ebből választható véges fedés. Ekkor a kiválasztott gömbök középpontjai ε -hálót alkotnak.
- ▶ ($\Rightarrow$ 2.) Legyen (x_n) sorozat Cauchy, melynek nem létezik határértéke, tehát torlódási pontja sincs. Azonban a tér kompakt, így sorozatkompakt, tehát ellentmondásba kerültünk.

Bizonyítás folytatása

($\Leftarrow$)

Elég sorozatkompaktságot látni, legyen (x_n) sorozat, mutassuk meg, hogy van torlódási pontja. Tekintsük a tér egy véges 1-hálóját, melynek minden pontja köré vegyünk fel zárt egységgömböket. Ezek lefedik a teret és véges sokan vannak, tehát valamelyik tartalmazza (x_n) végtelen sok elemét, jelöljük ezt a részsorozatot $(x_n^{(1)})$ -el. Legyen ez a gömb B_1 . B_1 -nek tekintsük valamely véges $1/2$ -hálóját, vegyünk ennek pontjai körül $1/2$ sugarú gömböket. Hasonlóan ezek között is van egy, mely tartalmazza $(x_n^{(1)})$ végtelen sok elemét, legyen ez B_2 .

Bizonyítás folytatása

Folytassuk a fenti eljárást. Mindegyik B_n -hez tekintsük azokat a zárt gömböket, melyek középpontja ugyanaz, de sugaruk kétszeres, jelöljük ezeket A_n -el. Ekkor A_n -ek egymást tartalmazó gömbök, teljesség miatt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ nem üres, és csak egyetlen x_0 pontból áll. Ez az x_0 pont az eredeti (x_n) sorozat torlódási pontja, hiszen bármely környezete tartalmazza valamely B_k gömböt, melyben a sorozat végtelen sok eleme megtalálható. Tehát a tér sorozatkompakt, azaz kompakt.

- Következmény: Metrikus terekben nem mindig igaz a „kompakt = korlátos és zárt”, hiszen pl. l_2 egységgömbje korlátos és zárt, mégsem kompakt.

Definíciók

- ▶ $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere, a következő metrikával: $\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$. Könnyű látni, hogy ez jó metrika.

Definíciók

- ▶ $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere, a következő metrikával: $\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$. Könnyű látni, hogy ez jó metrika.
- ▶ Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvények valamely Φ családját *egyenletesen korlátnak* nevezzük, ha létezik olyan K szám, melyre $\forall x \in [a, b]$ és $\forall \varphi \in \Phi$ esetén $|\varphi(x)| < K$.

Definíciók

- ▶ $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere, a következő metrikával: $\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$. Könnyű látni, hogy ez jó metrika.
- ▶ Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvények valamely Φ családját *egyenletesen korlátnak* nevezzük, ha létezik olyan K szám, melyre $\forall x \in [a, b]$ és $\forall \varphi \in \Phi$ esetén $|\varphi(x)| < K$.
- ▶ A Φ függvénycsalád *egyenlő mértékben egyenletesen folytonos*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$ melyre $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ melyekre $\rho(x_1, x_2) < \delta$ és $\forall \varphi \in \Phi$ függvényre $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$.

Arzela tétele

- ▶ Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények egy Φ családja a $C[a, b]$ térben akkor és csak akkor prekompakt, ha egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.

Arzela tétele

- ▶ Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények egy Φ családja a $C[a, b]$ térben akkor és csak akkor prekompakt, ha egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.
- ▶ Egyenlő mértékben egyenletesen folytonosságot nehéz látni, ezért használjuk egy erősebb feltételt: deriváltjaik legyenek korlátosak ugyanazzal a korláttal.

Arzela tétele

- ▶ Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények egy Φ családja a $C[a, b]$ térben akkor és csak akkor prekompakt, ha egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.
- ▶ Egyenlő mértékben egyenletesen folytonosságot nehéz látni, ezért használjuk egy erősebb feltételt: deriváltjaik legyenek korlátosak ugyanazzal a korláttal.
- ▶ Vegyük $C[0, 2\pi]$ -n az $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ stb. függvénycsaládot. Ez a függvénycsalád nem lesz prekompakt, hiszen a zérushelyeiknél a derivált egyre nagyobb értéket vesz fel. Tehát $C[0, 2\pi]$ egységsgömbje sem lesz kompakt.

Irodalom

Kolmogorov - Fomin: A függvényelmélet és funkcionálanalízis
elemei

Köszönöm a figyelmet!