

Diszkrét idejű felújítási paradoxon

Magda Gábor
Szaller Dávid
Tóvári Endre

2009. 11. 18.



- $X_1, X_2, \dots$ független és X -szel azonos eloszlású, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változó (felújítási idők)
- $\mathbf{P}(X \leq M) = 1$ valamilyen $M \in \mathbb{N}$
- $1 \leq x \leq M$ -re $p_x := \mathbf{P}(X = x)$
- $T_0 = 0, T_k = \sum_{i=1}^k X_i$ (felújítási időpontok)
- Az n időpontban α_n a legutóbbi felújítás óta eltelt idő, β_n a következő felújítási időpontig hátralévő idő
- Ha $n = T_k$, akkor $\alpha_n = 0$ és $\beta_n = X_{k+1}$
- $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ annak a felújítási intervallumnak a hossza, amibe n esik

$Y_n = (\alpha_n, \beta_n)$ Markov-lánc

Markov-tulajdonság:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n = (a_n, b_n) | Y_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1}), \dots, Y_1 = (a_1, b_1)) &= \\ = \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{a_n, 0} \cdot p_{b_n} & \text{ha } b_{n-1} = 1 \\ \delta_{a_n, a_{n-1}+1} \cdot \delta_{b_n, b_{n-1}-1} & \text{ha } b_{n-1} > 1 \end{array} \right\} \text{csak } Y_{n-1}\text{-től függ} \\ = \mathbf{P}(Y_n = (a_n, b_n) | Y_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1})) \Rightarrow \text{teljesül a Markov-tulajdonság} \end{aligned}$$

A Markov-lánc stacionárius eloszlása

Átmenet: $(a_n, b_n) \xrightarrow{b_n=1} (0, y)$, ahol y X eloszlású véletlen szám
 $\xrightarrow{b_n \neq 1} (a_n + 1, b_n - 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha_{n+1} = x, \beta_{n+1} = y) &= \\ &= \delta_{x,0} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{P}(\alpha_n = i, \beta_n = 1) \cdot p_y + (1 - \delta_{x,0}) \cdot \mathbf{P}(\alpha_n = x - 1, \beta_n = y + 1) \end{aligned}$$

A stacionárius állapotban $\mathbf{P}(\alpha_{n+1} = x, \beta_{n+1} = y)$ és $\mathbf{P}(\alpha_n = x, \beta_n = y)$ helyett $\pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y)$ -t írhatunk:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) &= \\ &= \delta_{x,0} \sum_{i=0}^{M-1} \pi(\alpha_\infty = i, \beta_\infty = 1) \cdot p_y + (1 - \delta_{x,0}) \cdot \pi(\alpha_\infty = x - 1, \beta_\infty = y + 1) \end{aligned}$$

A Markov-lánc stacionárius eloszlása

$$\pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) =$$

$$= \delta_{x,0} \sum_{i=0}^{M-1} \pi(\alpha_\infty = i, \beta_\infty = 1) \cdot p_y + (1 - \delta_{x,0}) \cdot \pi(\alpha_\infty = x - 1, \beta_\infty = y + 1)$$

Azaz $x \neq 0$ esetben $\pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) = \pi(\alpha_\infty = x - 1, \beta_\infty = y + 1)$
 $\Rightarrow \pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) = \varrho(x + y)$ csak az összeztől függ (rekurzívan belátható). Ha $x = 0$:

$$\pi(\alpha_\infty = 0, \beta_\infty = y) = \sum_{i=0}^{M-1} \pi(\alpha_\infty = i, \beta_\infty = 1) \cdot p_y$$

$$\varrho(y) = \sum_{i=0}^{M-1} \varrho(i + 1) \cdot p_y$$

$$\varrho(y) = \sum_{j=1}^M \varrho(j) \cdot p_y$$

A Markov-lánc stacionárius eloszlása

$$\varrho(y) = \sum_{j=1}^M \varrho(j) \cdot p_y \quad (1)$$

A $\pi(x, y)$ mátrix elemeinek összege egy teljes eseményrendszer valószínűsége, így 1 kell legyen.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-i} \pi(\alpha_{\infty} = i, \beta_{\infty} = j) &= 1 \\ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-i} \varrho(i+j) &= 1 \\ \sum_{i=1}^M i \cdot \varrho(i) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

(1)-et helyettesítsük be (2)-be.

A Markov-lánc stacionárius eloszlása

$$\varrho(y) = \sum_{j=1}^M \varrho(j) \cdot p_{yj} \quad (1)$$

$$1 = \sum_{i=1}^M i \underbrace{\sum_{j=1}^M \varrho(j) p_{ji}}_{\varrho(i)} = \sum_{i=1}^M i p_i \underbrace{\sum_{j=1}^M \varrho(j)}_{\mathbb{E}(X)}$$

Tehát $\sum_{j=1}^M \varrho(j) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$, ezt (1)-be helyettesítve:

$$\varrho(i) = \frac{p_i}{\mathbb{E}(X)}, \text{ így } \pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) = \frac{p_{x+y}}{\mathbb{E}(X)}$$

$$\gamma_{\infty} = \alpha_{\infty} + \beta_{\infty}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\gamma_{\infty} = x) &= \mathbf{P}(\alpha_{\infty} + \beta_{\infty} = x) = \sum_{i=0}^{x-1} \pi(\alpha_{\infty} = i, \beta_{\infty} = x - i) = \\ &= \sum_{i=0}^{x-1} \varrho(x) = x\varrho(x) = \frac{xp_x}{\mathbb{E}(X)} \end{aligned}$$

Ez a felújítási időkből vett hossz-torzított minta: az intervallumokat a hossz-várhatóértékhez viszonyított relatív hosszukkal súlyozzuk.

Egy késői (∞) időpont felújítási intervalluma hosszának (annak az intervallumnak a hossza, amibe a kései időpont beleesik) az eloszlása nem egyezik meg a felújítási intervallumok hosszának eloszlásával:

$$\mathbf{P}(\gamma_{\infty} = x) = \frac{xp_x}{\mathbb{E}(X)} \neq p_x = \mathbf{P}(X = x)$$

Ez a felújítási paradoxon.

Állítás: $\mathbb{E}(\gamma_\infty) > \mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(\gamma_\infty) = \sum_{i=1}^M \frac{i^2 p_i}{\mathbb{E}(X)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^M i p_i$$

$$(\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X) \sum_{i=1}^M i p_i$$

Számítsuk ki X szórásnégyzetét!

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^M (i^2 p_i - \mathbb{E}(X) i p_i) > 0$$

ha $p_i > 0$ legalább két i -re.

$\mathbb{E}(X)$ -szel leosztva:

$$\sum_{i=1}^M \left(\frac{i^2 p_i}{\mathbb{E}(X)} - i p_i \right) > 0$$

$$\mathbb{E}(\gamma_\infty) - \mathbb{E}(X) > 0$$

$$\mathbb{E}(\gamma_\infty) > \mathbb{E}(X)$$

$\Rightarrow$ kései időpontok felújítási intervallum-hosszának várható értéke nagyobb a felújítási intervallumok hosszának várható értékénél.



$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha_{\infty} = y | \gamma_{\infty} = x) &= \frac{\mathbf{P}(\alpha_{\infty} = y \text{ és } \gamma_{\infty} = x)}{\mathbf{P}(\gamma_{\infty} = x)} = \\ &= \frac{\pi(\alpha_{\infty} = y, \beta_{\infty} = x - y)}{\mathbf{P}(\gamma_{\infty} = x)} = \frac{\frac{p_x}{\mathbb{E}(X)}}{\frac{x p_x}{\mathbb{E}(X)}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

α_{∞} eloszlása rögzített γ_{∞} mellett diszkrét egyenletes. Azaz a véletlenszerűen választott időpont a hozzá tartozó intervallumban egyenletes eloszlású.

Becslés $1 \ll n$ -re:

- A nagy számok törvénye alapján n -ig kb. $\frac{n}{\mathbb{E}(X)}$ felújítás volt.
- Ennek p_x -ed része volt x hosszúságú, azaz $\frac{np_x}{\mathbb{E}(X)}$ db.
- Ezek összhossza (mindegyik x hosszúságú) $n \frac{xp_x}{\mathbb{E}(X)}$.
- Ha egyenletes eloszlással az $1 \dots n$ időpontok közül választunk, mennyi az esélye, hogy x hosszúságba esik?

$$\frac{x \text{ hosszúságú intervallumok összhossza}}{n} = \frac{xp_x}{\mathbb{E}(X)} = \mathbf{P}(\gamma_\infty = x)$$

$\Rightarrow$ Markov-láncok nélkül is kijön.

Köszönöm a figyelmet!

Én is!