

2009 ősz

1. Matematikai eszközök (részben ismétlés)

- (a) Topológia, differenciálgeometria alapfogalmai (sokaságok, külső szorzás, térfogati formák, ...), Lie-csoportok **(szept. 11., 18.)** (*Péter*)
 - W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
 - V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei
- (b) Mérték- és integrálelmélet (dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel, Radon-Nykodim tétel, feltételes várható érték, Haar mérték) **(szept. 25.)** (*Péter*)
 - R. B. Ash: Measure, integration, and functional analysis
 - P. Walters: Ergodic theory: introductory lectures (Haar mérték)
- (c) Komplex függvénytan **(okt. 2.)** (*Marci*)
 - Laurent sorfejtés, konform leképezések, kontúrintegrálok, Fourier-Laplace transzformáció

2. Parciális differenciálegyenletek:

- (a) Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldása (tér- és időváltozók szeparálása, Fourier módszerek, Green függvény) **(okt. 9.)** (*Marci*)
 - L. C. Evans: Partial differential equations
- (b) Nemlineáris parciális differenciálegyenletek: megmaradási törvények és Hamilton-Jacobi egyenletek, nemlineáris hullámok **(okt. 16.)** (*Marci*)
 - L. C. Evans: Partial differential equations

1. **Beszámoló:** 5×18 perc **(okt. 30.)**

3. Ergodelmélet és dinamikai rendszerek:

- (a) Alap definíciók, ergodtételek, alkalmazások; fraktálok **(nov. 6., (20.))** (*Péter*)
 - M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems

4. Sztochasztikus folyamatok: Fizikához közeli folyamatok és alkalmazások

- (a) Markov folyamatok: diszkrét időben (pl. bolyongások, esetleg kapcsolat áramkörökkel), Poisson folyamat, folytonos idejű ugró és nem ugró folyamatok (Brown-mozgás és hővezetési egyenlet) **(nov. 13., 20.)** (*Marci*)
 - S. I. Resnick: Adventures in Stochastic Processes
- (b) Néhány példa a statisztikus fizika matematikai módszereiből (dualitás, kontúrok?); pár szó a perkolációról **(dec. 4.)** (*Marci*)
 - G. Grimmett: Percolation

2. **Beszámoló:** 5×18 perc **(dec. 11.)**

Dátum	Téma	Beadandó
szept. 11.	Topológia, diff.geo. alapjai	-
szept. 18.	Differenciálgeometria	HF#1
szept. 25.	Mértékelmélet	HF#2
okt. 2.	Komplex függvénytan	HF#3
okt. 9.	Lineáris parc. diff.egyenletek	HF#4
okt. 16.	Nemlineáris parc. diff.egyenletek	HF#5
okt. 30.	-	1. beszámoló
nov. 6.	Ergodelmélet	HF#6
nov. 13.	Sztochasztikus foly.	HF#7
nov. 20.	(Ergodelmélet,) Sztochasztikus foly.	HF#8
dec. 4.	Sztochasztikus foly.	HF#9
dec. 11.	-	2. beszámoló

Összetettebb feladatok az 1. beszámolóra:

1. Topológia
2. Differenciálgeometria
3. Még egy differenciálgeometria
4. Mértékelmélet
5. Komplex függvénytan
6. Lineáris parciális differenciálegyenletek
7. Nemlineáris parciális parciális differenciálegyenletek

Összetettebb feladatok a 2. beszámolóra:

8. Ergodelmélet
9. Hausdorff dimenzió
10. Brown-mozgás
11. Poisson folyamat
12. Markov lánc
13. Perkoláció vagy statisztikus fizika

Házi feladatok a következő oldalon.

Balázs Márton, Bálint Péter

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2009 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontoszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el.

1.HF: (Beadási határidő: 2009.09.18. Ezen a héten még csak három feladat van, később több is lehet majd.)

HF 1.1•••• Emlékeztető – egy metrikus térből metrikus térbe való $\Phi : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ leképezés folytonosságának két lehetséges definíciója:

Definíció 1 Minden $(M$ -beli) nyílt hamaz ősképe nyílt halmaz $(N$ -ben).

Definíció 2 $\forall x \in M$ pontra, és $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists \delta > 0$ (ez függhet ε -től és x -től is), hogy $y \in M$, $d_M(x, y) < \delta$ esetén $d_N(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$.

Mutassuk meg, hogy ha Φ Definíció 1 értelmében folytonos, akkor Definíció 2 értelmében is az. (Megj: ez könnyebb, mint az órán bizonyított másik irány.)

HF 1.2•••• Legyen M teljes szeparábilis metrikus tér, $K_1, K_2 \subset M$ pedig diszjunkt, kompakt halmazok ($K_1 \cap K_2 = \emptyset$).

- Rögzítsünk egy $x_0 \notin K_1$ pontot, és mutassuk meg, hogy ennek K_1 -től való távolsága pozitív: $\exists R_0 > 0$, hogy $d(x, x_0) \geq R_0$ minden $x \in K_1$ pontra.
- Mutassuk meg, hogy K_1 és K_2 távolsága pozitív, azaz $\exists R > 0$, hogy $d(x, y) \geq R$ minden $x \in K_1$ és $y \in K_2$ esetén.
- Mutassunk példát arra, hogy ha a két halmaz közül valamelyik nem kompakt, akkor a diszjunkságukból nem feltétlenül következik, hogy a távolságukra van pozitív alsó korlát.

HF 1.3•••• Forgassuk meg a $(b, 0)$ középpontú, a sugarú körvonalat az origó körül ($b > a > 0$ tetszőleges számok), a kapott felület a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tórusz. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{T}^2$ egy kétdimenziós C^∞ sokaság. (Megj.: az órán tanultak alapján: elég az $\mathbb{S}^1$ körvonal egy térképezését megkonstruálni (miért?))

2.HF: (Beadási határidő: 2009.09.25. Ezen a héten is csak három feladat van, de később tényleg több is lehet majd.)

HF 2.1•••• Legyen M egy sima sokaság, X és Y sima vektormezők M -n. M minden p pontjában értelmezhetjük az alábbi lineáris operátorokat, melyek a $(p$ kis környezetben értelmezett) f sima függvényeken hatnak: (i) $(XY)_p(f) = X_p(Y(f))$; (ii) $(YX)_p(f) = Y_p(X(f))$, (iii) $[X, Y]_p = (XY)_p - (YX)_p$. Szavakban kifejezve: (i) és (ii) a két vektormező kétféle sorrendben vett egymás utáni alkalmazásával kapott operátor, (iii) pedig ezek különbsége. Mutassuk meg, hogy

- $(XY)_p$ ugyan lineáris operátor (ellenőrizzük ezt is), de mégsem érintővektor, mert nem feltétlen teljesíti a Leibniz szabályt;
- $[X, Y]_p$ érintővektor, azaz rá a Leibniz szabály is teljesül. (Az így adódó M -n értelmezett sima vektormezőt $-[X, Y]$ -t – az X és Y vektormezők kommutátorának vagy Lie-zárójelének is szokták nevezni.)

Útmutatás: a (b) feladatnál ellenőrizni kell, hogy a Leibniz szabály tetszőleges f, g függvényekre és X, Y vektormezőkre teljesül. (a)-hoz elég mutatni egy ellenpéldát, ilyen már abban az esetben is van, amikor $M = \mathbb{R}^2$, X és Y parciális deriválások, f és g pedig koordináta-függvények.

HF 2.2•••• Szemléltessük az alábbi vektormezőket és az általuk generált egyparaméteres csoport-hatásokat.

a) Tekintsük $\mathbb{R}^3$ -n a

$$\Theta(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at & 0 \\ -\sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

egyparaméteres csoporthatást, ahol $a > 0$ tetszőleges paraméter. Milyen vektormező generálja $\Theta(t, \underline{x})$ -t? Mutassuk meg, hogy ez a csoporthatás természetes módon megszorítható $\mathbb{S}^2$ -re: $\underline{x} \in \mathbb{S}^2$ (azaz $|\underline{x}| = 1$) esetén $\Theta(t, \underline{x}) \in \mathbb{S}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Szemléltessük a vektormezőt és a csoporthatást is $\mathbb{S}^2$ -n.

b) Tekintsünk $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ -re úgy, mint a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnyezetre, melynek a szemközti oldalait azonosítjuk. Így az (azonosított) négyzetoldalaktól eltekintve az (x_1, x_2) , $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ koordináták egy térképezését adják $\mathbb{T}^2$ -nek. Legyenek az X és az Y vektormezők ezen a térképen $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2}$, illetve $Y = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ (ezek a teljes $\mathbb{T}^2$ -re folytonos módon kiterjeszthetők). Milyenek lesznek a generált egyparaméteres csoporthatások pályái? (Hasonlítsuk össze X és Y pályáit.)

HF 2.3**** Az alábbi differenciálformák közül melyik zárt és melyik egzakt?

- $M = \mathbb{R}^3$ -n a standard koordinátákkal $\alpha = yz dx + xz dy + xy dz$;
- $M = \mathbb{R}^3$ -n a standard koordinátákkal $\beta = x dx + x^2 y^2 dy + yz dz$;
- $M = \mathbb{S}^1$, erre úgy tekintünk, mint a $[0, 1]$ intervallumra a két végpontjával azonosítva, a $0 < x < 1$ koordináta az (azonosított) végpontoktól eltekintve ad egy térképet, ezen a térképen $\gamma = dx$, melyet aztán folytonos módon kiterjesztünk $\mathbb{S}^1$ -re.

3.HF: (Beadási határidő: 2009.10.02.)

HF 3.1** Legyen $\mathcal{F}$ egy σ -algebra, $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ végesen additív halmazfüggvény (azaz $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$), és teljesüljön $\mu(\emptyset) = 0$ is. Mutassuk meg, hogy a következő tulajdonságok ekvivalensek:

- μ σ -additív, azaz ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, ahol $A_i \in \mathcal{F} \forall i$, és $A_i \cap A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$:
akkor $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. (Másképp szólva μ mérték.)
- Legyen $B_i \in \mathcal{F}$ tetszőleges monoton növekvő halmazsorozat, azaz $B_i \subset B_{i+1} \forall i$.
Ekkor $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$.
- Legyen $C_i \in \mathcal{F}$ tetszőleges monoton csökkenő halmazsorozat, azaz $C_{i+1} \subset C_i \forall i$.
Ekkor $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n)$.

HF 3.2** Legyen G kompakt topológikus csoport a Borel σ -algebrával és a μ Haar mértékkel. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $U \subset G$ nyílt halmaz mértéke pozitív. (Útmutatás: a Haar mértékre igaz, hogy $\mu(gU) = \mu(U) \forall g \in G$, ahol gU is nyílt (miért is?); használjuk ezt és a kompaktságot.)

HF 3.3**** Tekintsük a következő Borel mérhető halmazokat $\mathbb{R}$ -ben:

- Módosítsuk a triadikus Cantor halmaz konstrukcióját a következőképpen: induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból, és első lépésben vágjuk ki a $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ nyílt intervallumot, vagyis a középső negyedét. Így kapjuk a D_1 halmazt, ami két $\frac{3}{8}$ hosszú intervallum úniója, a második lépésben ezeknek is vágjuk ki a középső negyedét (tehát mindkettő közepéből egy-egy $\frac{1}{16}$ hosszúságú intervallumot), így adódik D_2 , négy egyforma hosszú intervallum úniója, és így tovább. Mutassuk meg az eljárás eredményéről, a $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ halmazról, hogy kontinuum számosságú, belseje üres (ezekben a tulajdonságokban hasonlít a Cantor halmazhoz), viszont Lebesgue mértéke pozitív.

- b) Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumból a racionális számokat, ezek megszámlálható sokan vannak, legyen $q_1, q_2, \dots$ egy felsorolásuk. Legyen továbbá ε egy tetszőlegesen kicsi pozitív szám, és $G_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} (q_i - \varepsilon 2^{-i}, q_i + \varepsilon 2^{-i})$, vagyis vesszük a racionális számok egyre kisebb sugarú környezeteinek únióját. Legyen továbbá $F_\varepsilon = [0, 1] \setminus G_\varepsilon$. Mutassuk meg, hogy egyrészt $\mu(F_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ (itt μ a Lebesgue mérték), másrészt viszont F_ε *seholsem sűrű*. Ez alatt azt értjük, hogy nincs egyetlen olyan $(a, b) \subset [0, 1]$ intervallum sem, amelyben F_ε sűrű lenne, vagyis amelynek minden pontját elő lehetne állítani F_ε -beli számok sorozatának határértékeként.

HF 3.4*** Vizsgáljuk meg az alábbi $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénysorozatokat a pontonkénti határértékük és az integráljaik határértéke szempontjából. Van-e olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, illetve $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény, hogy $f_n(x) \rightarrow f(x)$, illetve $g_n(x) \rightarrow g(x)$ Lebesgue majdnem minden $x \in [0, 1]$ -re? Mennyi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 g_n(x) dx \right)$? Teljesülnek-e a dominált konvergencia tétel, a monoton konvergencia tétel, valamint a Fatou lemma feltételei? Ha igen, mit mondanak ki ezek a tételek a konkrét esetekben?

1.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } 0 \leq x < 1/n, \\ 2n - n^2 x & \text{ha } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. Írjuk fel n -t $n = 2^k + l$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2, \dots$ és $l = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ (ez minden n -re egyértelműen megtehető). Legyen ezek után

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{l}{2^k} \leq x < \frac{l+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

HF 3.5** Tekintsük a következő $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x, 0 < y \text{ és } 0 \leq x - y \leq 1, \\ -1 & \text{ha } 0 < x, 0 < y \text{ és } 0 < y - x \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számoljuk ki $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$ -t és $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$ -t. Mi a helyzet a Fubini tétellel?

4.HF: (Beadási határidő: 2009.10.09.)

HF 4.1** **Egy intervallum harmonikus mértéke.** Fontos a Dirichlet probléma a felső félsíkon, az

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

peremfeltétellel, ahol $a < b$ valósak. Mutassuk meg, hogy az (a, b) intervallum

$$\alpha(z) := \text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - a)$$

harmonikus mértéke megoldja a fenti Dirichlet problémát. (Útmutatás: az Arg függvényt szerettük, és a Laplace operátor lineáris.).

HF 4.2•••• a) Oldjuk meg a Dirichlet problémát a felső félsíkon az

$$u(x, 0) = \begin{cases} 100^\circ, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 0^\circ, & \text{egyébként} \end{cases}$$

peremfeltétellel (lásd előző feladat). Mutassuk meg kis geometriával (középponti-kerületi szögek), hogy az izotermák a -1 és az 1 (komplex) pontokon átmenő körök, pontosabban a T hőmérsékletű izoterma a $(0, \operatorname{ctg}(\pi T/100^\circ))$ középpontú, $1/\sin(\pi T/100^\circ)$ sugarú kör.

- b) Mik a hőáramlás görbéi? (*Útmutatás*: mi is az Arg harmonikus konjugáltja?)
 c) Válaszoljuk meg ugyanezeket a kérdéseket az első síknegyedben értelmezett Dirichlet problémára az

$$u(x, y) = \begin{cases} 100^\circ, & \text{ha } x = 0 \text{ és } 0 < y < 1 \text{ vagy } 0 < x < 1 \text{ és } y = 0, \\ 0^\circ, & \text{egyébként} \end{cases}$$

peremfeltétellel. (*Útmutatás*: mit csinál a $w(z) = z^2$ ebből a problémából?)

HF 4.3•••• a) Legyen $z = x + iy$ és $w = 1/z = u + iv$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$(1) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & v(x, y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2}, \text{ illetve fordítva:} \\ x(u, v) &= \frac{u}{u^2 + v^2}, & y(u, v) &= \frac{-v}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

- b) Lássuk be, hogy a síkon minden kör és egyenes

$$(2) \quad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

alakba írható. Fordítva, minden (2) egyenlet egyenest vagy kört ír le, amennyiben $B^2 + C^2 > 4AD$.

- c) (1) és (2) alapján mutassuk meg, hogy a $w = 1/z$ inverzió egyenest egyenesbe vagy körbe, kört is egyenesbe vagy körbe visz át.
 d) Mutassuk meg, hogy z komplex lineáris transzformálása (azaz $\hat{z} = pz + q$; $p, q \in \mathbb{C}$) kört körbe visz és egyenest egyenesbe visz.
 e) Egy *lineáris törtleképzés*

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú, ahol $ad \neq bc$ valós számok. Mutassuk meg, hogy akár z , akár w , vagy akár mindkettő komplex lineáris transzformálása után a transzformáltak között továbbra is egy lineáris törtleképzés a kapcsolat.

- f) Az előzőek alapján lássuk be, hogy bármely lineáris törtleképzés egyenest egyenesbe vagy körbe, kört is egyenesbe vagy körbe visz át.

HF 4.4•• Legyen C egy kör, és z_0 egy pont a belsejében. Bizonyítandó, hogy azok a körök, melyeken rajta van z_0 , és C -t két pontban merőlegesen metszik, mind újra találkoznak egy z_1 , C -n kívüli pontban. Ezt a pontot hívjuk a z_0 C -re vetített tükörképének. (*Útmutatás*: van olyan lineáris törtleképzés, amelyik C -t a valós tengelybe, és C belsejét a felső félsíkba viszi. Hova viszi ez a leképezés a z_0 -t tartalmazó, C -t merőlegesen metsző köröket?)

5.HF: (Beadási határidő: 2009.10.16.)

HF 5.1^{••} Legyen az $u(\underline{x})$ skalármennyiség az $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ függvénye, és $r = |\underline{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Mutassuk meg, hogy ha u radiális, azaz $\underline{x}$ -től csak r -en keresztül függ, akkor a $v(r) = u(\underline{x})$ függvény segítségével

$$\underline{x} \cdot \nabla u(\underline{x}) = r \cdot v', \quad \text{és} \quad \Delta u(\underline{x}) = v''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot v'(r).$$

HF 5.2^{•••} Mutassuk meg, hogy a Laplace egyenlet forgatásinvariáns: ha $\Delta u = 0$ és $\underline{Q}$ egy $n \times n$ ortogonális mátrix, akkor $v(\underline{x}) := u(\underline{Q}\underline{x})$ is megoldja a Laplace egyenletet.

Alább egy kis előredolgozás a $\partial_t u(\underline{x}, t) - \Delta u(\underline{x}, t) = 0$ hőegyenlet irányában.

HF 5.3^{•••} Tegyük fel, hogy u sima, és megoldja a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hőegyenletet $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ -n.

a) Mutassuk meg, hogy minden valós λ -ra $u_\lambda(\underline{x}, t) := u(\lambda \underline{x}, \lambda^2 t)$ szintén megoldja a hőegyenletet.

b) **Ennek segítségével** mutassuk meg, hogy

$$v(\underline{x}, t) := \underline{x} \cdot \nabla u(\underline{x}, t) + 2t \partial_t u(\underline{x}, t)$$

is megoldja a hőegyenletet.

HF 5.4^{••••} Egy dimenzióban legyen $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$.

a) Mutassuk meg, hogy

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

pontosan akkor, ha

$$(3) \quad 4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z > 0).$$

b) Mutassuk meg, hogy (3) általános megoldása

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + d.$$

c) Lássuk be, hogy ha u egy megoldás, akkor $\partial_x u$ is megoldja az egydimenziós hőegyenletet.

d) Tehát: differenciáljuk az előbb kapott $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ -t x szerint, majd válasszuk meg megfelelően a c konstanst, hogy pont az egydimenziós fundamentális megoldást kapjuk:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

e) Lássuk be, hogy ennek a megoldásnak a hely szerinti integrálja minden t -re 1.

6.HF: (Beadási határidő: 2009.11.06.)

HF 6.1^{•••} **Ekvipartíciós tétel.** Legyen u a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty) \text{-n,} \\ u = g, \partial_t u = h & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \text{-n} \end{cases}$$

hullámegyenlet + kezdetiérték-feladat megoldása. Tegyük fel, hogy g és h kompakt tartójú. A *kinetikus* és *potenciális energiák*

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u(x, t))^2 dx \quad \text{illetve} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx.$$

Bizonyítandó, hogy

- a) $k(t) + p(t)$ konstans az időben;
 b) $k(t) = p(t)$ minden elég nagy t -re.

HF 6.2*** Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2/2 = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases} \quad \text{ahol} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

Burgers egyenletet kezdeti feltétellel.

- a) A karakterisztikák módszerével mutassuk meg, hogy – amíg el nem szakad – a megoldás a bal oldali 1, illetve jobb oldali 0 konstans értékek lineáris összekötésével kapható meg.
 b) A bal oldali 1, illetve jobb oldali 0 értékhez tartozó karakterisztikus sebesség figyelembevételével határozzuk meg a megoldás explicit alakját az elszakadás pillanatáig. Ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás valóban kielégíti a Burgers egyenletet és a fenti kezdeti feltételt.
 c) Mi történik (és mennyire) a megoldás elszakadását követően?

HF 6.3*** Ellenőrizzük, hogy a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2/2 = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases} \quad \text{ahol} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Burgers egyenlet és kezdeti feltételnek az

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < t/2, \\ 1, & \text{ha } x > t/2 \end{cases}$$

nem fizikai lökeshullám, és a

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x/t, & \text{ha } 0 < x < t, \\ 1, & \text{ha } x > t \end{cases}$$

ritkulási hullám egyaránt (gyenge) megoldása.

HF 6.4*** **Tényleg megmaradási törvény.** Tegyük fel, hogy $F(0) = 0$, és u egy olyan folytonos gyenge megoldása a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases}$$

megmaradási törvénynek, hogy $u(\cdot, t)$ minden $t \geq 0$ -ra kompakt tartójú. Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx \quad \text{minden } t\text{-re,}$$

azaz a teljes anyagmennyiség megmarad.

7.HF: (Beadási határidő: 2009.11.13.)

HF 7.1*** Tekintsük a

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad T(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0, \\ \frac{1}{x} \pmod{1} & \text{ha } x \neq 0. \end{cases}$$

dinamikai rendszert, azaz a Gauss leképezést. Mutassuk meg, hogy T -nek van (a Lebesgue mértékre nézve) abszolút folytonos invariáns (valószínűségi) mértéke, melynek sűrűségfüggvénye: $\varrho(x) = (\ln 2 (1 + x))^{-1}$.

HF 7.2*** Emlékeztető: ha $T : M \rightarrow M$ dinamikai rendszer μ invariáns mértékkel, és adott $A \subset M$, melyre $\mu(A) > 0$, akkor a Poincaré rekurrencia tételnek köszönhetően definiálható a $T_A : A \rightarrow A$ indukált leképezés: $x \in A$ -ra

$$T_A x = T^{r_A(x)} x, \quad \text{ahol} \quad r_A(x) = \min\{k \geq 1 \mid T^k x \in A\}.$$

Legyen $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $Tx = 2x \pmod{1}$ (a bináris leképezés), $A = (1/2, 1]$. Mi a $T_A x$ leképezés? Határozzuk meg az $r_A(x)$ első visszatérési idő eloszlását is (a Lebesgue mértékre nézve).

HF 7.3*** Legyen $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $Tx = x + 1/3 \pmod{1}$. Erre a forgatásra invariáns az alábbi két mérték (miért is?):

$$\mu_1 = \frac{1}{3} \left(\delta_{\frac{1}{6}} + \delta_{\frac{1}{2}} + \delta_{\frac{5}{6}} \right); \quad \mu_2 = \frac{1}{6} \left(\delta_0 + \delta_{\frac{1}{6}} + \delta_{\frac{1}{3}} + \delta_{\frac{1}{2}} + \delta_{\frac{2}{3}} + \delta_{\frac{5}{6}} \right).$$

μ_1 és μ_2 közül melyik ergodikus, és melyik keverő (T -re nézve)?

HF 7.4*** Tekintsük az $1, 2, \dots, 2^n, \dots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjainak első jegyeit. Előfordul-e ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb? (*Útmutatás:* Weyl tétele, és $\log_{10}(2)$ irracionális – miért is?)

8.HF: (Beadási határidő: 2009.11.20.)

HF 8.1*** A ξ_t , $t = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:

- a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);
- b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \dots \xi_t$;
- c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.

A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

HF 8.2*** Egy szabályos érmét dobálok. Várhatóan hányszor kell feldobnom az érmét, hogy FFF -et lássak? És hogy FIF -et lássak? (*Útmutatás:* érdemes egy nyolc állapotú állapotteret felrajzolni. (A harmadik érmedobás után van csak értelme állapotokról beszélni).)

HF 8.3*** Az eső minden nap a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik, és ha esik, akkor pontosan délben esik. Egy öreg kertész akkor locsolja meg a kertjét, ha látja, hogy se ma délben, se tegnap, se tegnapelőtt nem érte víz (azaz locsolás vagy eső) a kertet. Várhatóan hányszor locsol egy évben? (*Útmutatás:* Figyeljünk, állítólag ezt a feladatot szinte mindenki el szokta tolni.)

HF 8.4*** Legyenek $X_1, X_2, \dots$ egymás utáni kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Legyen

$$\begin{aligned} T_1 &= \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható } 7\text{-tel}\}, \\ T_2 &= \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható } 7\text{-tel}\}, \\ T_3 &= \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható } 8\text{-cal}\}, \\ T_4 &= \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható } 8\text{-cal}\}. \end{aligned}$$

Határozzuk meg T_1, T_2, T_3, T_4 várható értékeit. (*Útmutatás:* A 7-es könnyű, a 8-ashoz tekintsük $(S_n \pmod{8})$ -at mint Markov láncot $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$ -en.)

9.HF: (Beadási határidő: 2009.12.04.)

HF 9.1^{•••} Legyenek X_n f.a.e.v.v. $\text{Exp}(\lambda)$ valószínűségi változók, és $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Mutassuk meg, hogy S_n sűrűségfüggvénye

$$f_{S_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad x > 0.$$

Itt Γ a Gamma-függvény: $\Gamma(n) = (n-1)!$ ha $n > 0$ egész. S_n eloszlását pedig Gamma eloszlásnak hívják.

HF 9.2^{•••} Többek közt telefonbeszélgetések is jól modellezhetők ON–OFF folyamatokkal: ezek folytonos idejű Markov folyamatok egy ON és egy OFF nevű állapottal, és λ rátával OFF-ból ON-ba, illetve μ rátával ON-ból OFF-ba. Határozzuk meg expliciten a $\underline{P}(t)$ átmenetvalószínűség-mátrixot, és mutassuk meg, hogy a Markov folyamat eloszlása bármilyen kiindulási állapot esetén a stacionárius eloszláshoz konvergál amint $t \rightarrow \infty$.

HF 9.3^{•••} a) Jelölje H az égboltnak azt a részét, ami 10 fényévnél távolabb van tőlünk, de 20 fényévnél közelebb. Tegyük fel, hogy egy köbfényévnnyi nagyságú térrészbe várhatóan 1 csillag esik, és minden csillag egyforma fényes. Egy 10 fényévre levő csillag fényereje egységnyi nagyságúnak látszik. Mi a H -ból a szemünkbe érkező fény mennyiségének várható értéke (elszántaknak: szórásnégyzete)? (*Útmutatás:* osszuk H -t koncentrikus, infinitezimális vastagságú karélyokra, és használjunk térbeli Poisson folyamatot.)
b) Miért nem világos az éjszakai égbolt? Alkossunk matematikai modellt a világ-egyetemben lévő csillagok helyzetére és az éjszakai égbolt látványára. (Különös tekintettel a Tejútra ...)

HF 9.4^{•••} **A Brown-mozgás Fourier-sorfejtése.** Legyenek Z_n f.a.e.v.v. standard normálisok ($n = 0, 1, \dots$), és

$$B(t) := \frac{t}{\sqrt{\pi}} \cdot Z_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mt)}{m} \cdot Z_m.$$

Állítás, hogy ez – legalábbis valamely véges ideig – Brown-mozgás. Ennek alátámasztására (ez még nem teljes bizonyítás, de nem baj...) mutassuk meg, hogy $\text{Cov}(B(s), B(t)) = \min\{s, t\}$. (*Útmutatás:*

- * A kovariancia bilineáris.
- * $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$.
- * Fourier transzformációból tudjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.)$$