

Maxwell-egyenletek koordináta-független alakja

Kiss István Petrőcz Tamás Szarvas Tamás

Fizikus MSc
BME

2009. október 30.

Amiről szó lesz:

- ▶ Emlékeztető, célkitűzés
- ▶ Bevezetés
- ▶ Érintőtér
- ▶ k -formák
- ▶ k -formák az érintőtéren
- ▶ Külső deriválás
- ▶ Érintőterek leképezései
- ▶ Maxwell-egyenletek
- ▶ Minkowski-tér
- ▶ Metrika
- ▶ Hodge-szorzás
- ▶ Külső deriválás adjungáltja
- ▶ Maxwell-egyenletek invariáns alakjai
- ▶ Összegzés
- ▶ Hivatkozások

Emlékeztető, célkitűzés

Fogalmak: sokaság, atlasz, homeomorfizmus, diffeomorfizmus, iránymenti derivált, külső derivált, Λ -szorzat, k -forma, ...

$\mathbb{R}^3$ k -formái: táblázatosan szedve láthatóak:

$\Lambda^k M$	$\Lambda^3 M$	$\Lambda^2 M$	$\Lambda^1 M$	$\Lambda^0 M$
$\text{Dim}(\Lambda^k M)$	1	3	3	1
ált. elem	$g(x)$	$\mathbf{w}(x)$	$\mathbf{v}(x)$	$f(x)$
szárm. elem	$(\nabla \mathbf{w})(x)$	$(\nabla \times \mathbf{v})(x)$	$(\nabla f)(x)$	

Maxwell-egyenletek $\mathbb{R}^3$ -beli alakja:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

Gauss-féle mértékegységrendszerben.

Célkitűzés: Megmutatni, hogy tetszőleges sokaságon érvényben maradnak a Maxwell-egyenletek

Bevezetés

Definíció:

Egy M topológikus tér egy C^p osztályú differenciálható sokaság, ha lokálisan euklideszi, azaz $\exists \mathcal{A} = \{u_i, \varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ atlasz, hogy:

- ▶ $M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} u_i$
- ▶ $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(u_i \cap u_j) \rightarrow \varphi_i(u_i \cap u_j)$ leképezés C^p osztályú diffeomorfizmus.

A definícióban szereplő u_i az M sokaság egy nyílt halmaza, $\varphi_i : u_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy homeomorfizmus, és egy leképezés C^p osztályú diffeomorfizmus, ha önmaga és inverze is C^p osztályú és egyben bijekció is.

Megjegyzés:

A $p = \infty$, illetve $p = \omega$ a sima, illetve analitikus sokaságok jelölése.

Definíció:

Az $f : M \rightarrow \mathbb{R} \ C^q$ osztályú, ha valamely (u, φ) térképen az $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \ C^q$ osztályú. ($q < p$)

Állítás:

Az f kiterjed az egész térképre, mint C^q osztályú függvény. (Az előbbi definíció tehát értelmes.)

Definíció:

Az $f : M \rightarrow N \ C^q$ osztályú, ha valamely $(u, \varphi); (v, \psi)$ térkép párra: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(u) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(v) \subset \mathbb{R}^n \ C^q$ osztályú. ($q < p$)

Állítás:

Az f kiterjed az egész térképre, mint C^q osztályú függvény. (Az előbbi definíció tehát értelmes.)

Érintőtér

Definíció:

γ egy $x \in U_i \subset M$ kezdőpontú görbe M -en, ha $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, és $\gamma \in C^1$, valamint $\gamma(0) = x$.

Definíció:

γ_1 és γ_2 érintkezik x -ben, ha:

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \gamma_2) \right|_{t=0},$$

ahol $\varphi \circ \gamma : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy „euklideszi” függvény, melyet tudunk differenciálni.

Állítás:

Az érintkezés térképfüggetlen.

Definíció:

$T_x M = \{\text{az } x\text{-en átmenő egymással érintekző görbék ekvivalencia osztályainak halmaza}\}$. (És ezekből elég egy reprezentást venni az osztály jellemzésére.)

Definíció:

Legyen $F_\varphi : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$, melynek hatása:

$v \mapsto F_\varphi(v) := \left. \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$, azaz egy osztályhoz a rá egyértelműen értelmezett deriváltat feleltetjük meg.

Állítás:

Természetes módon definiálunk lineáris struktúrát $T_x M$ -en:

- ▶ $u + v$, melyre: $F_\varphi(u + v) = F_\varphi(u) + F_\varphi(v)$
- ▶ rv , melyre: $F_\varphi(rv) = rF_\varphi(v)$

Következmény:

F_φ egy lineáris izomorfizmus $T_x M$ és $\mathbb{R}^n$ elemei között.

k-formák

Legyen V egy vektortér n -dimenziós. Ekkor a bázis $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, amin
 $\forall \mathbf{v}(\in V) = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i$

Definíció:

$V^* : V \rightarrow R$ a lineáris formák tere V -n. Szintén n -dimenziós,
bázisára: $\bar{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$, így $\forall \bar{v}(\in V^*) = v_i \bar{e}^i$.

Definíció:

k -lineáris leképezés a $\tau^k(V) \ni K$, $K : V \times V \times \dots \times V \rightarrow R$, és
minden tényezőjében lineáris.

Definíció:

Legyen $K \in \tau^k(V)$, $L \in \tau^l(V)$, ekkor $K \otimes L \in \tau^{l+k}(V)$, ha
 $(K \otimes L)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = K(v_1, \dots, v_k)L(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$.
Az antiszimmetrikus k -lineáris leképezések a k -formák. Jelölése:
 $\Lambda^k(V)$, dimenziója: $\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}$. Bázis rajta:
 $(f_{i_1} \wedge f_{i_2} \cdots \wedge f_{i_k})$

k-formák az érintőtéren

Állítás:

Az érintőtéren bázist alkot a $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^n$. Azaz tetszőleges $v \in T_x M$ -re:

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Állítás:

A TM érintőtér koérintőtérének nevezzük a T^*M -et, melyen a bázis: $(dx^1, \dots, dx^n)$. (Természetes bázis: $dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i$)

Definíció:

A koérintőtér k -formáinak terét $\Lambda^k M$ jelöli, egy eleme pedig:

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

Külső deriválás

Definíció:

$\exists$ olyan művelet a differenciálformákon, melyre:

- ▶ $\omega \in \Lambda^k M \rightarrow d\omega \in \Lambda^{k+1} M$ és $d : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}$
- ▶ $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
- ▶ $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ (d formálisan egyforma)
- ▶ $df(v) = v(f)$
- ▶ $d^2 f = 0$

Állítás:

$$d\omega = \frac{1}{k!} \sum_{j, i_1, \dots, i_k} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + (-1)^0 f d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \\ &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + (-1)^0 f (d^2 x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^2 x^{i_k}) = \\ &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = df(v) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots = \\ &= v(f) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(v) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \end{aligned}$$

Megjegyzés:

Elég volt egy nyílt halmazon belátni, többire kiterjed, és elegendő egy tagra a linearitás miatt.

Definíció:

$Z^k(M) := \{\omega \in \Lambda^k M \mid d\omega = 0\}$ halmaz elemei a zárt formák.

Definíció:

$B^k(M) := \{\omega \in \Lambda^k M \mid \omega = d\eta \quad \eta \in \Lambda^{k-1}(M)\}$ halmaz elemei az egzakt formák.

Állítás:

Minden egzakt forma zárt, de fordítva nem biztos. Azonban egyszeresen összefüggő tartományon biztos.

Érintőterek leképezései

Definíció:

Legyen $\phi : M \rightarrow N$ leképezés, ekkor a hozzá tartozó érintő és koérintő teren legyen ennek hatása: $\phi_{*x} : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$ és $\phi_x^* : T_{\phi(x)}^* N \rightarrow T_x^* M$.

Állítás:

- ▶ $\phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2)$
- ▶ $\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$
- ▶ $d\phi^*(\omega) = \phi^*(d\omega)$

Maxwell-egyenletek

Maxwell-egyenletek koordinátás alakban:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$4\pi\rho = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Minkowski-tér elemi

Definíció:

Legyen $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$; ahol $x^1 = x, \dots, x^4 = ct$. Legyen továbbá $j = (j^1, j^2, j^3, j^4)$; ahol $j^1 = \frac{4\pi}{c}j^x, \dots, j^4 = 4\pi\rho$. És definiáljuk az alábbi 4×4 -es antiszimmetrikus mátrixot:

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{bmatrix}$$

A Minkowski-tér k -formái:

$\Lambda^k M$	$\Lambda^4 M$	$\Lambda^3 M$	$\Lambda^2 M$	$\Lambda^1 M$	$\Lambda^0 M$
$\text{Dim}(\Lambda^k M)$	1	4	6	4	1
obj.			F	j	

Állítás:

A „homogén” Maxwell-egyenletek ekvivalensek az alábbi kifejezéssel:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

Példa:

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial x^4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x^3} = -\frac{\partial H_y}{\partial ct} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0.$$

Az egyik invariáns Maxwell egyenlet

Definíció:

$F := \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ a minkovski téren értelmezett (invariáns) 2-forma.

Definíció:

A 3-szor kovariáns mátrix (tenzor) antiszimmetrizáltja:

$$M_{\eta\mu\nu}^{AS} = \frac{1}{3!} (M_{\eta\mu\nu} + M_{\nu\eta\mu} + M_{\mu\nu\eta} - M_{\nu\mu\eta} - M_{\eta\nu\mu} - M_{\mu\eta\nu})$$

Állítás:

$$dF = 0$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}dF &= \frac{1}{2} \partial_\eta F_{\mu\nu} dx^\eta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \\&= \frac{1}{2} \frac{1}{3!} (\partial_\eta F_{\mu\nu} + \dots - \partial_\eta F_{\nu\mu} - \dots) dx^\eta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \\&= \frac{1}{3!} (\partial_\eta F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\eta\mu} + \partial_\mu F_{\nu\eta}) dx^\eta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0\end{aligned}$$

Metrika

Definíció:

Görbevonalú koordináta rendszerben: $g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}_\mu(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_\nu(\mathbf{x})$ a metrikus tenzor (a tér görbültségét méri a tér $\mathbf{x}$ pontjain).

- ▶ ha g pozitív definit, akkor Riemann metrika M -en
- ▶ ha $\exists \{\mathbf{e}_\mu(\mathbf{x})\}$ bázis, ahol: $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^M$, akkor g Lorentz metrika M -en

$$g_{\mu\nu}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{\mu\nu}^M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Állítás:

A „forrásos” Maxwell-egyenletek ekvivalensek az alábbi kifejezéssel:

$$\partial^\nu F_{\alpha\nu} = j_\alpha = g_{\alpha\mu} j^\mu$$

Példa:

$$\begin{aligned}\partial^\nu F_{2\nu} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \\ &= \frac{4\pi}{c} j^y = j^2 = g_{2\nu} j^\nu = j_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^\nu F_{4\nu} &= -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\ &= -4\pi\rho = -j^4 = g_{4\nu} j^\nu = j_4\end{aligned}$$

Hodge-szorzás

Definíció:

$*$: $\Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{D-k} M$ izomorfizmus. (Értelmes mivel $\binom{D}{k} = \binom{D}{D-k}$)

Állítás:

Ha $\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\eta_1, \dots, \eta_k} dx^{\eta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\eta_k}$, akkor

$$*\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{k!(D-k)!} \omega_{\eta_1, \dots, \eta_k} \varepsilon_{\nu_{k+1}, \dots, \nu_D}^{\eta_1, \dots, \eta_k} dx^{\nu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D},$$

ahol $\varepsilon_{\eta_1, \dots, \eta_n} = \begin{cases} +1, & \text{ha } \eta_1 \dots \eta_n \text{ páros permutáció} \\ -1, & \text{ha } \eta_1 \dots \eta_n \text{ páratlan permutáció} \end{cases}$

Állítás:

$$*F = * \left(\frac{1}{2} F_{\mu_1 \mu_2} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \right) = \frac{1}{4} F_{\mu_1 \mu_2} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2}^{\mu_1 \mu_2} dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2}$$

Így kapjuk:

$$*F_{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2}^{\mu_1 \mu_2} F_{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} F^{\mu_1 \mu_2}$$

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{bmatrix} \quad *F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & H_x \\ E_z & 0 & -E_x & H_y \\ -E_y & E_x & 0 & H_z \\ -H_x & -H_y & -H_z & 0 \end{bmatrix}$$

A külső deriválás adjungáltja

Definíció:

Legyen $\eta \in \Lambda^k M$ és $\omega \in \Lambda^{k-1} M$ formák, és $d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$ a külső deriválás. A $d^+ : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k-1} M$ művelet a külső deriválás adjungáltja, ha:

$$(d\omega, \eta) = (\omega, d^+ \eta),$$

ahol $(\cdot, \cdot)$ egyfajta integrálás a sokaságon...

Állítás:

▶ $d^+ = (-1)^{kD+D+1} * d^* \text{ Riemann metrikán}$

▶ $d^+ = (-1)^{kD+D} * d^* \text{ Lorentz metrikán}$

$$d^+ : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{m-k} \rightarrow \Lambda^{m-k+1} \rightarrow \Lambda^{m-(m-k+1)} = \Lambda^{k-1}$$

A másik invariáns Maxwell-egyenlet

Állítás:

$$d^+ F = j,$$

ahol $j = j_\mu dx^\mu$, és $j_\mu = g_{\mu\nu} j^\nu$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} d^+ F &= *d * F = *d * \left(\frac{1}{2} F_{\eta\nu} dx^\eta \wedge dx^\nu \right) = \\ &= *d \frac{1}{4} \sqrt{|g|} F_{\eta\nu} \varepsilon_{\rho\sigma}^{\eta\nu} dx^\rho \wedge dx^\sigma = \\ &= *\partial_\tau \frac{1}{4} \sqrt{|g|} F_{\eta\nu} \varepsilon_{\rho\sigma}^{\eta\nu} dx^\tau \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} \partial_\tau \left(\sqrt{|g|} F_{\eta\nu} \right) \varepsilon_{\varrho\sigma}^{\eta\nu} \varepsilon_\alpha^{\tau\varrho\sigma} dx^\alpha = \\
&= -\frac{1}{4} \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} \partial_\tau \left(\sqrt{|g|} F_{\eta\nu} \right) \varepsilon_{\varrho\sigma}^{\eta\nu} \varepsilon^{\alpha\tau\varrho\sigma} dx^\alpha = \\
&= -\frac{1}{4} \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} \partial_\tau \left(\sqrt{|g|} F_{\eta\nu} \right) \frac{1}{|g|} (\delta^{\eta\alpha} \delta^{\nu\tau} - \delta^{\eta\tau} \delta^{\nu\alpha}) dx^\alpha = \\
&= \frac{1}{3!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial^\nu \left(\sqrt{|g|} F_{\alpha\nu} \right) dx^\alpha = j_\alpha dx^\alpha = j
\end{aligned}$$

Összegzés

Mivel tetszőleges sokaságok közötti $\phi : M \rightarrow N$ leképezésre láttuk, hogy: $d\phi^*(\omega) = \phi^*(d\omega)$; a Maxwell egyenletek tetszőleges sokaságon érvényesek, és alakjuk:

$$dF = 0 \quad d^+F = j$$

Megjegyzés:

Fontos feladat olyan gravitációs térelméletet találni, mely szintén ilyen tulajdonságú; és ez az általános relativitáselmélet.

Hivatkozások

-  Szőkefalvi-Nagy Gyula, *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
-  Nagy Károly, *Elektrodinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
-  Órai jegyzet
-  Lévay Péter: Modern matematika órai jegyzet