

2010 ősz

1. Matematikai eszközök (részben ismétlés)

- (a) Topológia, differenciálgeometria alapfogalmai (sokaságok, külső szorzás, térfogati formák, ...), Lie-csoportok **(szept. 10., 17.)** (*Péter*)
 - W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
 - V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei
- (b) Komplex függvénytan **(szept. 24.)** (*Marci*)
 - Laurent sorfejtés, konform leképezések, kontúrintegrálok, Fourier-Laplace transzformáció
- (c) Mérték- és integrálelmélet (dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel, Radon-Nykodim tétel, feltételes várható érték, Haar mérték) **(okt. 1.)** (*Péter*)
 - R. B. Ash: Measure, integration, and functional analysis
 - P. Walters: Ergodic theory: introductory lectures (Haar mérték)

2. Parciális differenciálegyenletek:

- (a) Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldása (tér- és időváltozók szeparálása, Fourier módszerek, Green függvény) **(okt. 8.)** (*Marci*)
 - L. C. Evans: Partial differential equations
- (b) Nemlineáris parciális differenciálegyenletek: megmaradási törvények és Hamilton-Jacobi egyenletek, nemlineáris hullámok **(okt. 15.)** (*Marci*)
 - L. C. Evans: Partial differential equations

1. Beszámoló: **(okt. 22.)**

3. Sztochasztikus folyamatok: Fizikához közeli folyamatok és alkalmazások

- (a) Markov folyamatok: diszkrét időben (pl. bolyongások, esetleg kapcsolat áramkörökkel), Poisson folyamat, folytonos idejű ugró és nem ugró folyamatok (Brown-mozgás és hővezetési egyenlet) **(okt. 29., nov. 5., (19.))** (*Marci*)
 - S. I. Resnick: Adventures in Stochastic Processes

4. Ergodelmélet és dinamikai rendszerek:

- (a) Alap definíciók, ergodtételek, alkalmazások; fraktálok **(nov. 12., (19.))** (*Péter*)
 - M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems
- (b) Néhány példa a statisztikus fizika matematikai módszereiből (dualitás, kontúrok?); pár szó a perkolációról **(nov. 19.)** (*Marci*)
 - G. Grimmett: Percolation

2. Beszámoló: **(dec. 3.)**

3. Beszámoló: **(dec. 10.)**

Dátum	Téma	Beadandó
szept. 10.	Topológia, diff.geo. alapjai	-
szept. 17.	Differenciálgeometria	HF #1
szept. 24.	Komplex függvénytan	HF #2
okt. 1.	Mértékelmélet	HF #3
okt. 8.	Lineáris parc. diff.egyenletek	HF #4
okt. 15.	Nemlineáris parc. diff.egyenletek	HF #5
okt. 22.	-	1. beszámoló
okt. 29.	Sztochasztikus foly.	HF #6
nov. 5.	Sztochasztikus foly.	HF #7
nov. 12.	Ergodelmélet	HF #8
nov. 19.	Stat. fiz, ergodelm.	HF #9
dec. 3.	-	2. beszámoló
dec. 10.	-	3. beszámoló

Összetettebb feladatok az 1. beszámolóra (október 22):

1. Baire kategória tétel (topológia)
2. Arzela-Ascoli tétel (topológia)
3. Hausdorff dimenzió, önhasznó halmazok, fraktálok (mértékelmélet)
4. Julia halmazok, Mandelbrot halmaz (komplex függvénytan, dinamikai rendszerek)
5. Lagrange és/vagy Hamilton mechanika (differenciálgeometria)
6. Mátrixcsoportok (differenciálgeometria)
7. Integrálás sokaságokon, de Rahm kohomológia (differenciálgeometria)
8. Loewner evolúció (a divatos SLE egyik alapja; komplex függvénytan)

Összetettebb feladatok a 2. és 3. beszámolóra (december 3 és 10):

1. Baire kategória tétel (topológia)
2. Arzela-Ascoli tétel (topológia)
3. Julia halmazok, Mandelbrot halmaz (komplex függvénytan, dinamikai rendszerek)
4. KAM tétel (Dinamikai rendszerek; mért van kisbolygóövezet?)
5. Loewner evolúció (a divatos SLE egyik alapja; komplex függvénytan)
6. Nemlineáris megmaradási egyenletrendszerek (Burgers-hez hasonló egyenletek több változóra)
7. Markov folyamatok és ellenálláshálózatok
8. Martingálok: a legjobb jóslat
9. Generatorfüggvények és a baktériumtenyészet
10. Sorbanállási rendszerek és szép tulajdonságaik

11. A Brown-mozgás és a sztochasztikus diff.egyenletek néhány alapötlete
12. Függő perkolációk a síkon: last passage és Winkler perkoláció

Házi feladatok a következő oldalon.

Balázs Márton, Bálint Péter

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2010 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontoszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el.

1. HF: (Beadási határidő: 2010.09.17.)

HF 1.1••• Emlékeztető – egy metrikus térből metrikus térbe való $\Phi : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ leképezés folytonosságának két lehetséges definíciója:

Definíció 1 Minden $(M$ -beli) nyílt hamaz ösképe nyílt halmaz $(N$ -ben).

Definíció 2 $\forall x \in M$ pontra, és $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists \delta > 0$ (ez függhet ε -től és x -től is), hogy $y \in M, d_M(x, y) < \delta$ esetén $d_N(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$.

Mutassuk meg, hogy ha Φ Definíció 2 értelmében folytonos, akkor Definíció 1 értelmében is az. (További emlékeztető: egy metrikus térben az U halmaz nyílt, ha $\forall x \in U$ esetén létezik $\varepsilon > 0$, hogy $B_\varepsilon(x) \subset U$, ahol $B_\varepsilon(x) = \{y \in M | d_M(x, y) < \varepsilon\}$.)

HF 1.2 Legyen M teljes szeparábilis metrikus tér, $K \subset M$ kompakt halmaz. Emlékeztető: ez azt jelenti, hogy K minden nyílt fedéséből kiválasztható véges nyílt fedés.

- (a)•• Mutassuk meg, hogy ha $f : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény (azaz f folytonos és $f(x) > 0 \forall x \in K$), akkor $\exists R > 0$ pozitív konstans, hogy $f(x) > R$.
- (b)•• Mutassuk meg, hogy K mindenképpen korlátos, azaz lefedhető egy gömbbel: $\exists R > 0$ és $x \in M$, hogy $K \subset B_R(x)$.

HF 1.3 A gyakorlaton definiáltuk az $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (egység)gömb térképezését két térképpel, a $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ és $\psi : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sztereografikus projekciókkal, az $N = (0, 0, 1)$ északi, illetve $S = (0, 0, -1)$ déli sarokpontból, az egyenlítőn átmenő $x_3 = 0$ síkra.

- (a)•• Mutassuk meg, hogy $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ végtelen sokszor differenciálható leképezés. (Útmutatás: használjunk polárkoordinátákat.)
- (b)• Mibe viszi a φ leképezés a szélességi és a hosszúsági köröket?
- (c)• Tekintsünk egy az egyenlítőt érintő l egyenest az $x_3 = 0$ síkban (pl. az $x_1 = 1$ egyenest), és legyen $\gamma = \varphi^{-1}l$, vagyis $\gamma \subset S^2$ az a gömbfelületen futó görbe, amit a φ leképezés ebbe az egyenesbe visz. Milyen görbe γ ? (Útmutatás: Ha az N északi sarokpontot összekötjük az l egyenes pontjaival, egy síkot kapunk.)
- (d)• Mibe viszi ugyanezt a γ görbét a ψ leképezés? (Útmutatás: most is használjuk $\varphi \circ \psi^{-1}$ polárkoordinátás alakját.)

2. HF: (Beadási határidő: 2010.09.24.)

HF 2.1 Legyen M egy sima sokaság, X és Y sima vektormezők M -n. M minden p pontjában értelmezhetjük az alábbi lineáris operátorokat, melyek a $(p$ kis környezetben értelmezett) f sima függvényeken hatnak: (i) $(XY)_p(f) = X_p(Y(f))$; (ii) $(YX)_p(f) = Y_p(X(f))$, (iii) $[X, Y]_p = (XY)_p - (YX)_p$. Szavakban kifejezve: (i) és (ii) a két vektormező kétféle sorrendben vett egymás utáni alkalmazásával kapott operátor, (iii) pedig ezek különbsége. Mutassuk meg, hogy

- (a)•• $(XY)_p$ ugyan lineáris operátor (ellenőrizzük ezt is), de mégsem érintővektor, mert nem feltétlen teljesíti a Leibniz szabályt;
- (b)• $[X, Y]_p$ érintővektor, azaz rá a Leibniz szabály is teljesül. (Az így adódó M -n értelmezett sima vektormezőt $-[X, Y]$ -t – az X és Y vektormezők kommutátorának vagy Lie-zárójelének is szokták nevezni.)

Útmutatás: a (b) feladatnál ellenőrizni kell, hogy a Leibniz szabály tetszőleges f, g függvényekre és X, Y vektormezőkre teljesül. (a)-hoz elég mutatni egy ellenpéldát, ilyen már abban az esetben is van, amikor $M = \mathbb{R}^2$, X és Y parciális deriválások, f és g pedig koordináta-függvények.

HF 2.2 Szemléltessük az alábbi vektormezőket és az általuk generált egyparaméteres csoport-hatásokat.

(a)• Tekintsük $\mathbb{R}^3$ -n a

$$\Theta(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos at & 0 & \sin at \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin at & 0 & \cos at \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

egyparaméteres csoporthatást, ahol $a > 0$ tetszőleges paraméter. Milyen vektormező generálja $\Theta(t, \underline{x})$ -t? Mutassuk meg, hogy ez a csoporthatás természetes módon megszorítható $\mathbb{S}^2$ -re: $\underline{x} \in \mathbb{S}^2$ (azaz $|\underline{x}| = 1$) esetén $\Theta(t, \underline{x}) \in \mathbb{S}^2, \forall t \in \mathbb{R}$. Szemléltessük a vektormezőt és a csoporthatást is $\mathbb{S}^2$ -n.

(b)•• Tekintsünk $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ -re úgy, mint a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzetre, melynek a szemközti oldalait azonosítjuk. Így az (azonosított) négyzetoldalaktól eltekintve az (x_1, x_2) , $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ koordináták egy térképezését adják $\mathbb{T}^2$ -nek. Legyenek az X és az Y vektormezők ezen a térképen $X = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2}$, illetve $Y = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{5}\frac{\partial}{\partial x_2}$ (ezek a teljes $\mathbb{T}^2$ -re folytonos módon kiterjeszthetők). Milyenek lesznek a generált egyparaméteres csoporthatások pályái? (Hasonlítsuk össze X és Y pályáit.)

HF 2.3•• Legyen V háromdimenziós vektortér, és e_1, e_2, e_3 V egy bázisa (gondolhatunk pl. $\mathbb{R}^3$ -ra és benne a standard bázisra), f_1, f_2, f_3 pedig ennek a duális bázisa. Ekkor $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$ térfogati forma, melyre $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3(e_1, e_2, e_3) = 1$, ahogy azt a gyakorlaton láttuk. Legyen v_1, v_2, v_3 a V vektortér egy másik bázisa: ekkor létezik egy A_{ij} 3×3 -as invertálható mátrix, melyre $v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}e_j$. Mutassuk meg, hogy $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3(v_1, v_2, v_3) = \det A$, ahol $\det A$ az A mátrix determinánsa.

HF 2.4 Az alábbi differenciálformák közül melyik zárt és melyik egzakt?

- (a)• $M = \mathbb{R}^3$ -n a standard koordinátákkal $\alpha = yz dx + xz dy + xy dz$;
- (b)• $M = \mathbb{R}^3$ -n a standard koordinátákkal $\beta = x dx + x^2 y^2 dy + yz dz$;
- (c)•• $M = \mathbb{S}^1$, erre úgy tekintünk, mint a $[0, 1]$ intervallumra a két végpontjával azonosítva, a $0 < x < 1$ koordináta az (azonosított) végpontoktól eltekintve ad egy térképet, ezen a térképen $\gamma = dx$, melyet aztán folytonos módon kiterjesztünk $\mathbb{S}^1$ -re.

3. HF: (Beadási határidő: 2010.10.01.)

HF 3.1•• **Egy intervallum harmonikus mértéke.** Fontos a Dirichlet probléma a felső félsíkon, az

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

peremfeltétellel, ahol $a < b$ valósak. Mutassuk meg, hogy az (a, b) intervallum

$$\alpha(z) := \frac{1}{\pi} (\text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - a))$$

harmonikus mértéke megoldja a fenti Dirichlet problémát. (*Útmutatás:* az Arg függvényt szerettük, és a Laplace operátor lineáris.).

HF 3.2 (a)• Oldjuk meg a Dirichlet problémát a felső félsíkon az

$$u(x, 0) = \begin{cases} 100^\circ, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 0^\circ, & \text{egyébként} \end{cases}$$

peremfeltétellel (lásd előző feladat). Mutassuk meg kis geometriával (középponti-kerületi szögek), hogy az izotermák a -1 és az 1 (komplex) pontokon átmenő körök, pontosabban a T hőmérsékletű izoterma a $(0, \operatorname{ctg}(\pi T/100^\circ))$ középpontú, $1/\sin(\pi T/100^\circ)$ sugarú kör.

- (b)• Mik a hőáramlás görbéi? (*Útmutatás*: mi is az Arg harmonikus konjugáltja?)
 (c)• Válaszoljuk meg ugyanezeket a kérdéseket az első síknegyedben értelmezett Dirichlet problémára az

$$u(x, y) = \begin{cases} 100^\circ, & \text{ha } x = 0 \text{ és } 0 < y < 1 \text{ vagy } 0 < x < 1 \text{ és } y = 0, \\ 0^\circ, & \text{egyébként} \end{cases}$$

peremfeltétellel. (*Útmutatás*: mit csinál a $w(z) = z^2$ ebből a problémából?)

HF 3.3*** Legyen $\mathbb{H} = \{x + iy : y \geq 0\}$ a felső félsík, és $\Omega = \mathbb{H} \setminus \{x + iy : x^2 + y^2 < 1\}$, $\mathbb{C}$ felső félsíkja, melyből kivágtuk az origó középpontú, egy sugarú körlap felső felét. Mutassuk meg, hogy a

$$J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Joukowski leképezés Ω -t $\mathbb{H}$ -ba viszi, speciálisan a felső, egységsugarú körvonalat a $[-1, 1]$ valós intervallumba. Ráadásul J analitikus Ω -n, és a deriváltja Ω belsejében nem nulla.

HF 3.4 Az előzőek alapján határozzuk meg a HF 3.3-ban szereplő Ω alakú vaslemez stacionárius

- (a)•• hőmérsékletét,
 (b)• izotermáit,
 (c)• hőáramlási vonalait,

ha az origó középpontú, egy sugarú felső félkörön 100 fokos a perem, a valós tengelyek $|x| > 1$ részén pedig 0 fokos.

4. HF: (Beadási határidő: 2010.10.08.)

HF 4.1** Legyen $\mathcal{F}$ egy σ -algebra, $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ végesen additív halmazfüggvény (azaz $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$), és teljesüljön $\mu(\emptyset) = 0$ is. Mutassuk meg, hogy a következő tulajdonságok ekvivalensek:

- (i) μ σ -additív, azaz ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, ahol $A_i \in \mathcal{F} \forall i$, és $A_i \cap A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$:
 akkor $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. (Másképp szólva μ mérték.)
 (ii) Legyen $B_i \in \mathcal{F}$ tetszőleges *monoton növekvő* halmazsorozat, azaz $B_i \subset B_{i+1} \forall i$.
 Ekkor $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$.
 (iii) Legyen $C_i \in \mathcal{F}$ tetszőleges *monoton csökkenő* halmazsorozat, azaz $C_{i+1} \subset C_i \forall i$.
 Ekkor $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n)$.

HF 4.2*** Tekintsük a következő Borel mérhető halmazokat $\mathbb{R}$ -ben:

- (a) Módosítsuk a triadikus Cantor halmaz konstrukcióját a következőképpen: induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból, és első lépésben vágjuk ki a $(0.4, 0.6)$ nyílt intervallumot, vagyis a középső *ötödét*. Így kapjuk a D_1 halmazt, ami két 0.4 hosszú intervallum úniója, a második lépésben ezeknek is vágjuk ki a középső ötödét (tehát a $(0.16, 0.24)$ és a $(0.76, 0.84)$ intervallumokat), így adódik D_2 , négy egyforma hosszú intervallum úniója, és így tovább. Mutassuk meg az eljárás eredményéről, a $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ halmazról, hogy kontinuum számosságú, belseje üres (ezekben a tulajdonságokban hasonlít a Cantor halmazhoz), viszont *Lebesgue mértéke pozitív*.
- (b) Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumból a racionális számokat, ezek megszámlálható sokan vannak, legyen $q_1, q_2, \dots$ egy felsorolásuk. Legyen továbbá ε egy tetszőlegesen kicsi pozitív szám, és $G_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} (q_i - \frac{\varepsilon}{i^2}, q_i + \frac{\varepsilon}{i^2})$, vagyis vesszük a racionális számok egyre kisebb sugarú környezetének únióját. Legyen továbbá $F_\varepsilon = [0, 1] \setminus G_\varepsilon$. Mutassuk meg, hogy egyrészt $\mu(F_\varepsilon) \geq 1 - C\varepsilon$ (itt μ a Lebesgue mérték, C pedig egy pozitív konstans), másrészt viszont F_ε *seholsem sűrű*. Ez alatt azt értjük, hogy nincs egyetlen olyan $(a, b) \subset [0, 1]$ intervallum sem, amelyben F_ε sűrű lenne, vagyis amelynek minden pontját elő lehetne állítani F_ε -beli számok sorozatának határértékeként.

HF 4.3*** Vizsgáljuk meg az alábbi $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénysorozatokat a pontonkénti határértékük és az integráljaik határértéke szempontjából. Van-e olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, illetve $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény, hogy $f_n(x) \rightarrow f(x)$, illetve $g_n(x) \rightarrow g(x)$ Lebesgue majdnem minden $x \in [0, 1]$ -re? Mennyi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 g_n(x) dx \right)$? Teljesülnek-e a dominált konvergencia tétel, a monoton konvergencia tétel, valamint a Fatou lemma feltételei? Ha igen, mit mondanak ki ezek a tételek a konkrét esetekben?

(a)

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x - n^3x^2 & \text{ha } 0 \leq x < 2/n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) Írjuk fel n -t $n = \frac{3^k-1}{2} + l$ alakban, ahol $k = 1, 2, \dots$ és $l = 0, 1, \dots, 3^k - 1$ (ez minden n -re egyértelműen megtehető – miért is?). Legyen ezek után

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{l}{3^k} \leq x < \frac{l+1}{3^k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

HF 4.4** Legyen adva az $(M, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktéren egy μ -re abszolút folytonos ($\nu \ll \mu$) mérték, ennek μ -re vonatkozó sűrűségfüggvénye (vagy Radon-Nikodym deriváltja) legyen $\rho(x)$. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben $\mu \ll \nu$ akkor és csak akkor, ha $\rho(x) > 0$ μ -majdnem minden $x \in M$ -re. (Megjegyzés: ha $\mu \ll \nu$ és $\nu \ll \mu$, akkor azt mondjuk, hogy a két mérték ekvivalens.)

HF 4.5** Tekintsük a következő $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x, 0 < y \text{ és } 0 \leq x - y \leq 1, \\ -1 & \text{ha } 0 < x, 0 < y \text{ és } 0 < y - x \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számoljuk ki $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$ -t és $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$ -t. Mi a helyzet a Fubini tétellel?

5. HF: (Beadási határidő: 2009.10.15.)

HF 5.1^{••} Legyen az $u(\underline{x})$ skalármennyiség az $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ függvénye, és $r = |\underline{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$. Mutassuk meg, hogy ha u radiális, azaz $\underline{x}$ -től csak r -en keresztül függ, akkor a $v(r) = u(\underline{x})$ függvény segítségével

$$\underline{x} \cdot \nabla u(\underline{x}) = r \cdot v', \quad \text{és} \quad \Delta u(\underline{x}) = v''(r) + \frac{d-1}{r} \cdot v'(r).$$

HF 5.2^{•••} Mutassuk meg, hogy a Laplace egyenlet forgatásinvariáns: ha $\Delta u = 0$ és $\underline{Q}$ egy $d \times d$ ortogonális mátrix, akkor $v(\underline{x}) := u(\underline{Q}\underline{x})$ is megoldja a Laplace egyenletet.

HF 5.3 **Maximum elv.** Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, nyílt, és összefüggő. Legyen u egy sima, harmonikus függvény Ω -n (azaz $\Delta u(\underline{x}) = 0$, ha $\underline{x} \in \Omega$).

- (a)^{•••} Mutassuk meg, hogy ha van egy olyan $\underline{x}_0 \in \Omega$, melyre $u(\underline{x}_0) = \max_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} u(\underline{x})$ (itt $\bar{\Omega}$ az Ω lezártját jelöli), akkor u konstans Ω -n. (Útmutatás: órán (majdnem) bebizonyítottuk az átlagérték-tulajdonságot, mely szerint

$$u(\underline{x}_0) = \frac{1}{|B(\underline{x}_0, r)|} \cdot \int_{B(\underline{x}_0, r)} u(\underline{y}) \, d\underline{y},$$

persze csak ha r elég kicsi ahhoz, hogy a gömb még teljesen Ω -ban legyen. Használjuk.)

- (b)^{••} Következésképp mutassuk meg, hogy $\max_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} u(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in \partial\Omega} u(\underline{x})$.

HF 5.4^{••} **Egyértelműség.** Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, nyílt, és összefüggő. Legyen f egy folytonos függvény Ω -n, és g folytonos $\partial\Omega$ -n. Mutassuk meg, hogy legfeljebb egy megoldása lehet a

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \Omega\text{-n,} \\ u = g & \partial\Omega\text{-n} \end{cases}$$

Poisson egyenletnek, g peremfeltétellel. (Útmutatás: Mit mond a maximum elv két megoldás különbségéről?)

6.HF: (Beadási határidő: 2010.10.29.)

HF 6.1^{•••} **Ekvipartíciós tétel.** Legyen u a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty) \text{-n,} \\ u = g, \partial_t u = h & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \text{-n} \end{cases}$$

hullámegyenlet + kezdetiérték-feladat megoldása. Tegyük fel, hogy g és h kompakt tartójú. A *kinetikus* és *potenciális energiák*

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u(x, t))^2 \, dx \quad \text{illetve} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 \, dx.$$

Bizonyítandó, hogy

- (a) $k(t) + p(t)$ konstans az időben;
(b) $k(t) = p(t)$ minden elég nagy t -re.

HF 6.2*** **Tényleg megmaradási törvény.** Tegyük fel, hogy $F(0) = 0$, és u egy olyan sima megoldása a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases}$$

megmaradási törvénynek, hogy $u(\cdot, t)$ minden $t \geq 0$ -ra kompakt tartójú.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \quad \text{minden } t\text{-re,}$$

azaz a teljes anyagmennyiség megmarad.

(b) F pedig tényleg áram: mutassuk meg, hogy az $[a, b]$ intervallumban levő teljes anyagmennyiség t -kor

$$(1) \quad \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_0^t F(u(a, s)) ds - \int_0^t F(u(b, s)) ds.$$

Megjegyzés: a fentiek igazak maradnak abban az esetben is, ha a megoldás elszakad, de ezt most még nem tudjuk bebizonyítani.

HF 6.3*** Fogadjuk el, hogy az elszakadás után is igaz marad az (1) anyagmegmaradási egyenlet. A karakterisztikák módszere alapján nem meglepő (és igaz), hogy szigorúan konvex F , valamint $u_{\text{bal}} > u_{\text{jobb}}$ esetén

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u(x, 0) = g(x) \begin{cases} = u_{\text{bal}}, & \text{ha } x \leq x_b, \\ \in [u_{\text{jobb}}, u_{\text{bal}}], & \text{ha } x_b < x < x_j, \\ = u_{\text{jobb}}, & \text{ha } x \geq x_j, \end{cases} & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases}$$

megoldása véges időn belül átmegy egy olyan lökeshullám megoldásba, mely egyetlen pontban szakad, ettől balra a megoldás értéke u_{bal} , jobbra pedig u_{jobb} , és ez a lökeshullám valamely sebességgel halad. Az (1) anyagmegmaradás alapján számítsuk ki a lökeshullám sebességét (miután kialakult). Hogyan viszonyul a kapott sebesség az u_{bal} illetve u_{jobb} két oldalhoz tartozó karakterisztikus sebességhez?

HF 6.4*** Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2/2 = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases} \quad \text{ahol } g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

Burgers egyenletet kezdeti feltétellel.

- (a) A karakterisztikák módszerével mutassuk meg, hogy – amíg el nem szakad – a megoldás a bal oldali 1, illetve jobb oldali 0 konstans értékek lineáris összekötésével kapható meg.
- (b) A bal oldali 1, illetve jobb oldali 0 értékhez tartozó karakterisztikus sebesség figyelembevételével határozzuk meg a megoldás explicit alakját az elszakadás pillanatáig. Ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás valóban kielégíti a Burgers egyenletet és a fenti kezdeti feltételt.

7.HF: (Beadási határidő: 2010.11.05.)

HF 7.1*** Ellenőrizzük, hogy a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (u \cdot (1 - u)) = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases} \quad \text{ahol} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

(kissé módosított) Burgers egyenlet és kezdeti feltételnek az

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha } x < \frac{t}{12}, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } x > \frac{t}{12} \end{cases}$$

nem fizikai lökéshullám, és a

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha } x \leq -\frac{t}{3}, \\ \frac{t-x}{2t}, & \text{ha } -\frac{t}{3} \leq x \leq \frac{t}{2}, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } x \geq \frac{t}{2} \end{cases}$$

ritkulási hullám egyaránt (gyenge) megoldása.

HF 7.2 Autók közlekedését nagy léptékekben többé kevésbé jól leírja a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n,} \end{cases}$$

megmaradási egyenlet, ahol F egy szigorúan konkáv sima függvény, $F(0) = F(1) = 0$, $-\infty < d_1 < F''(u) < d_2 < 0$ minden $u \in (0, 1)$ esetén, és $0 \leq g(x) \leq 1$. Az interpretáció az, hogy u az autók sűrűsége, F pedig az autók árama (darab/másodperc); világos, hogy 0 sűrűség mellett nincs autó, maximális, 1 sűrűség mellett viszont teljesen beállt a dugó, és azért nincs autó-áram.

- (a)*** Határozzuk meg az autók sebességét egy (x, t) pontban, ahol $u(x, t)$ érték az autók sűrűsége; tegyük fel, hogy u épp nem szakad ennek a helynek egy nyílt környezetén. (*Útmutatás:* $F(u)$ megmondja, hogy mennyi autó halad át másodpercenként x -en, u -ból pedig könnyen jön, hogy (közelítőleg, hiszen u épp folytonos) mennyi autó van az $[x - \varepsilon, x]$ útszakaszon. Így egyszerűen számolható, hogy mennyi ideig tart az erre a kis szakaszra eső utolsó autónak átmenni x -en.)
- (b)*** **Az autók előbb-utóbb kijönnek a dugóból.** Legyenek $1 > c_{\text{bal}} > c_{\text{jobb}} > 0$ számok, és a kezdőfeltételünk

$$g(x) \begin{cases} = c_{\text{bal}} \text{ konstans,} & \text{ha } x < x_1, \\ = c_{\text{jobb}} \text{ konstans,} & \text{ha } x > x_2, \\ \text{tetszőleges csökkenő függvény } (c_{\text{jobb}}, c_{\text{bal}})\text{-ban,} & \text{ha } x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Ez a kezdőfeltétel tehát leírja a dugó végét (ritkulási hullám). A karakterisztikák módszerével könnyen látható, hogy minden $t > 0$ -kor az u (entrópia)megoldás ekkor c_{bal} és c_{jobb} között marad, valamint sima és nem-növekvő lesz mint az x függvénye. Ráadásul mindig lesz egy olyan időtől függő $X(t)$ pont, amitől jobbra már konstans c_{jobb} a megoldás, ennek sebessége a c_{jobb} -hoz tartozó karakterisztikus sebesség. Mutassuk meg, hogy minden autó idővel átjut a közlekedési káoszon, azaz hagyja az $X(t)$ pontot. (*Útmutatás:* Mutassuk meg (egy jó rajz elég), hogy az F függvény tulajdonságai miatt adható egy olyan $v > 0$ szám, hogy a fent meghatározott autó-sebesség minden $u \in [c_{\text{jobb}}, c_{\text{bal}}]$ esetén legalább v -vel gyorsabb, mint az u -hoz tartozó karakterisztikus sebesség. Ezért az autós

sosem lassul (miért is?), és kiszemelhet maga előtt egy pontot, ahol a karakterisztikus sebesség $v/2$ -vel nagyobb, mint a saját pozícióján érvényes karakterisztikus sebesség. Az ehhez tartozó sűrűséget az autós véges időn belül eléri (miért is?), majd ismét kiszemelheti a forgalomnak egy olyan pontját, ahol a karakterisztikus sebesség az ő pillanatnyi helyén érvényes karakterisztikus sebesség plusz $v/2$, és így tovább. Véges sok ilyen lépés után eléri a c_{jobb} sűrűségű fázist (miért is?).

HF 7.3*** A ξ_t , $t = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:

- a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);
- b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \dots \xi_t$;
- c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.

A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

8.HF: (Beadási határidő: 2010.11.12.)

HF 8.1 A Médiarendőrség a TV nézéssel kapcsolatban a következő állapotokat figyelte meg: 0 (sosem néz TV-t), 1 (csak közszolgálati műsorokat néz), 2 (gyakran TV-zik), 3 (függő), 4 (viselkedési zavarok figyelhetők meg), 5 (agyalott). Ezen állapotok közti átmeneteket egy Markov láncsal lehet modellezni, melynek átmenetmátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a)** 1-es állapotból indulva, mi a valószínűsége, hogy az 5-ös állapot előbb bekövetkezik, mint a 0-s, azaz, hogy egy közszolgálati műsorokat néző agyalottként végzi?
- (b)** Várhatóan mennyi ideig tart amíg egy közszolgálati műsorokat néző leszokik a TV-zésről, vagy pedig eléri az agyalott állapotot?

HF 8.2**** Alább három Markov lánc szóban és hozzá három eloszlás. Írjuk fel a Markov láncok állapottereit, átmenetvalószínűségeit, és igazoljuk, hogy a megfelelő eloszlások a stacionáriusak.

- (a) n , körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit. **Fermi-Dirac eloszlás:** k golyót véletlenszerűen elosztunk $n \geq k$ urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet.
- (b) n , körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:** k megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.
- (c) n , körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Bose-Einstein eloszlás:** k megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

HF 8.3*** **A Brown-mozgás Fourier-sorfejtése.** Legyenek Z_n f.a.e.v.v. standard normálisok ($n = 0, 1, \dots$), és

$$B(t) := \frac{t}{\sqrt{\pi}} \cdot Z_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mt)}{m} \cdot Z_m.$$

Állítás, hogy ez – legalábbis valamely véges ideig – Brown-mozgás. Ennek alátámasztására (ez még nem teljes bizonyítás, de nem baj...) mutassuk meg, hogy a fenti definícióval $\mathbf{Cov}(B(s), B(t)) = \min\{s, t\}$. (Útmutatás:

- * A kovariancia bilineáris.
- * $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$.
- * Fourier transzformációból tudjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.)$$

9.HF: (Beadási határidő: 2010.11.19.)

HF 9.1*** Mutassuk meg, hogy a $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $Tx = 4x(1-x)$ kvadratikus leképezésnek van (a Lebesgue mértékre mézve) abszolút folytonos invariáns (valószínűségi) mértéke, melynek sűrűségfüggvénye: $\rho(x) = C(x(1-x))^{-1/2}$. Mennyi C értéke?

HF 9.2*** Legyen $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $Tx = x + 1/5 \pmod{1}$. Erre a forgatásra invariáns az alábbi két mérték (miért is?):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{5} (\delta_{0,1} + \delta_{0,3} + \delta_{0,5} + \delta_{0,7} + \delta_{0,9}); \\ \mu_2 &= \frac{1}{10} (\delta_0 + \delta_{0,1} + \delta_{0,2} + \delta_{0,3} + \dots + \delta_{0,8} + \delta_{0,9}). \end{aligned}$$

μ_1 és μ_2 közül melyik ergodikus, és melyik keverő (T -re nézve)?

HF 9.3*** Tekintsük a $3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots$ számok kettes számrendszerben felírt alakjaiban az első két jegyet. Mi a gyakoribb, a 11 vagy a 10?

HF 9.4*** (**A pék leképezése**). Legyen $M = [0, 1] \times [0, 1]$ (az egységnégyzet), és a $T : M \rightarrow M$ dinamikai rendszert definálja $(x, y) \in M$ -re

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (2x - 1, \frac{y+1}{2}) & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Tekintsük az $R_1 = \{(x, y) \in M : 0 \leq x < 1/2\}$, és az $R_2 = \{(x, y) \in M : 1/2 \leq x \leq 1\}$ téglalapokat. Mi lesz TR_1 és TR_2 (ezeknek a halmazoknak a képe)? (Ebből talán látszik, miért hívják T -t a pék leképezésének.)
- (b) A T leképezés invertálható: írjuk fel, mik lesznek $T^{-1}(x, y)$ koordinátái.
- (c) Írjuk fel az $(x, y) \in M$ pont mindkét koordinátáját kettes számrendszerben, azaz $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i}$, és minden x_i és y_i ($i = 1, 2, \dots$) "kettesjegy" 0 vagy 1 lehet. Fejezzük ki az $(x', y') = T(x, y)$ képpont koordinátáinak kettes számrendszerbeli alakját az x_i és y_i "kettesjegyekkel".