

# Nemlineáris parciális differenciálegyenletek

Matematikai problémamegoldó gyakorlat  
2009/10 őszi félév

Gajdos Fruzsina  
Deák András  
Kabódi László  
Fülöp Gergő



- Megmaradó mennyiség áramlását leíró differenciálegyenlet:

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x F(u) = 0$$

$u(x, t)$ : áramló mennyiség (pl. sűrűség)

$F(u)$ : áram (pl. sűrűségáram)

- Kezdeti feltétel:

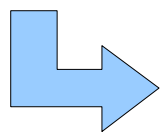
$$u(x, t=0) = g(x)$$

- Karakterisztikák módszere

Keressük  $x(s)$  pályát, hogy  $u(x(s), s) = z(s) = \text{konst.}$

$$\dot{z}(s) = \partial_x u \cdot \dot{x} + \partial_t u = 0 \quad (\text{amíg } u \text{ sima})$$

$$F' \cdot \partial_x u + \partial_t u = 0$$



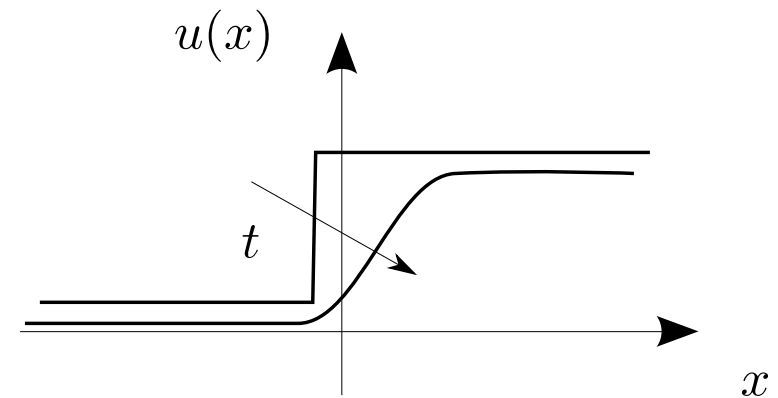
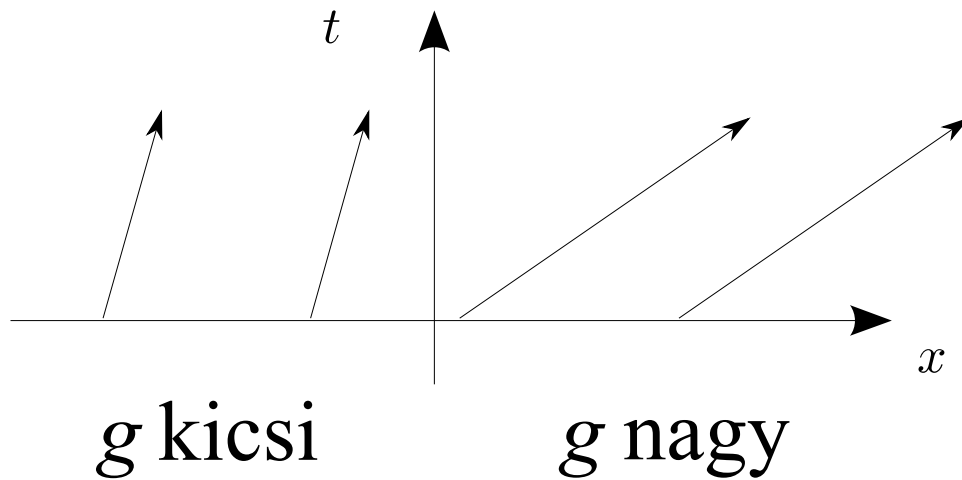
$$F'(u) = \dot{x}(s)$$

Azaz a karakterisztikák irányát  $F'(u)$  határozza meg!

- Feltettük, hogy  $F(u)$  konvex

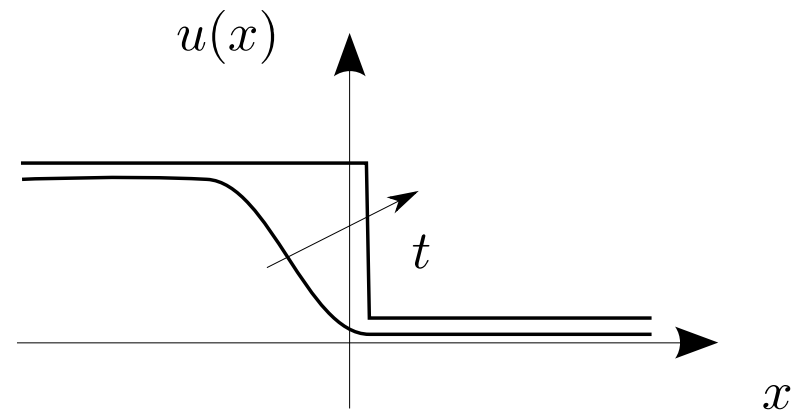
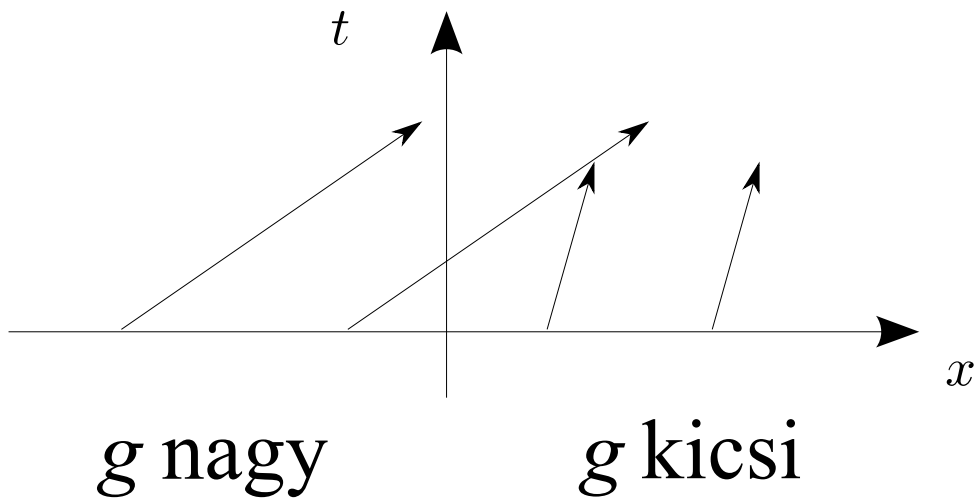
# További emlékek

- Ritkulási hullám



# További emlékek

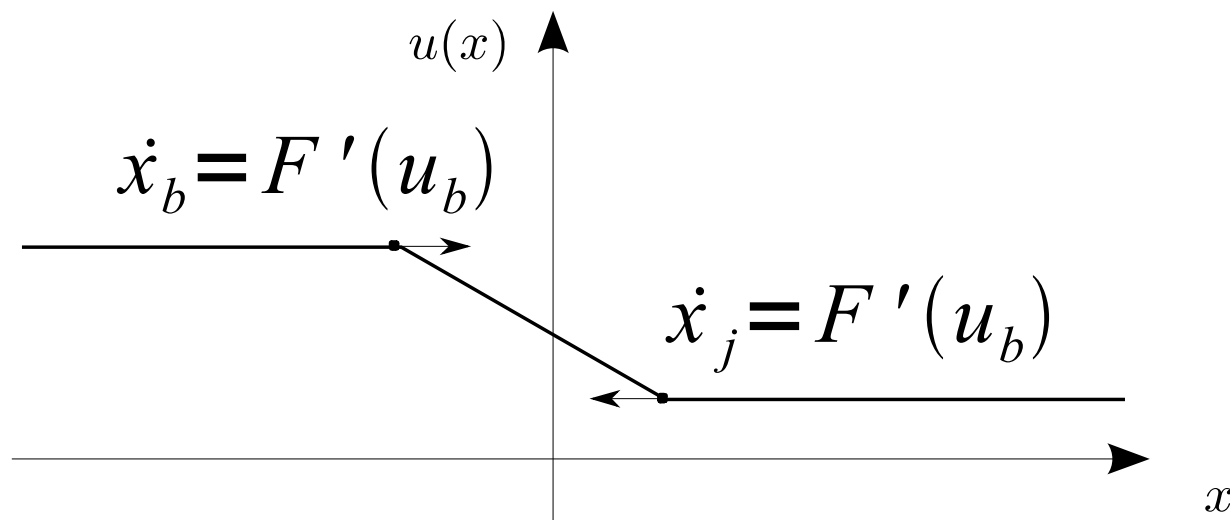
- Lökéshullám



# Rankine-Hugoniot sebesség

- Rankine-Hugoniot sebesség (a lökéshullám terjedési sebessége):

$$\dot{x}_{RH}(t) = \frac{F(u_b) - F(u_j)}{u_b - u_j}$$



# Riemann-probléma

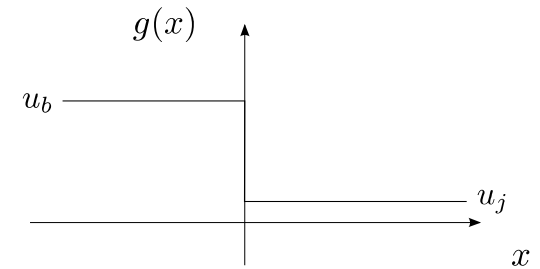
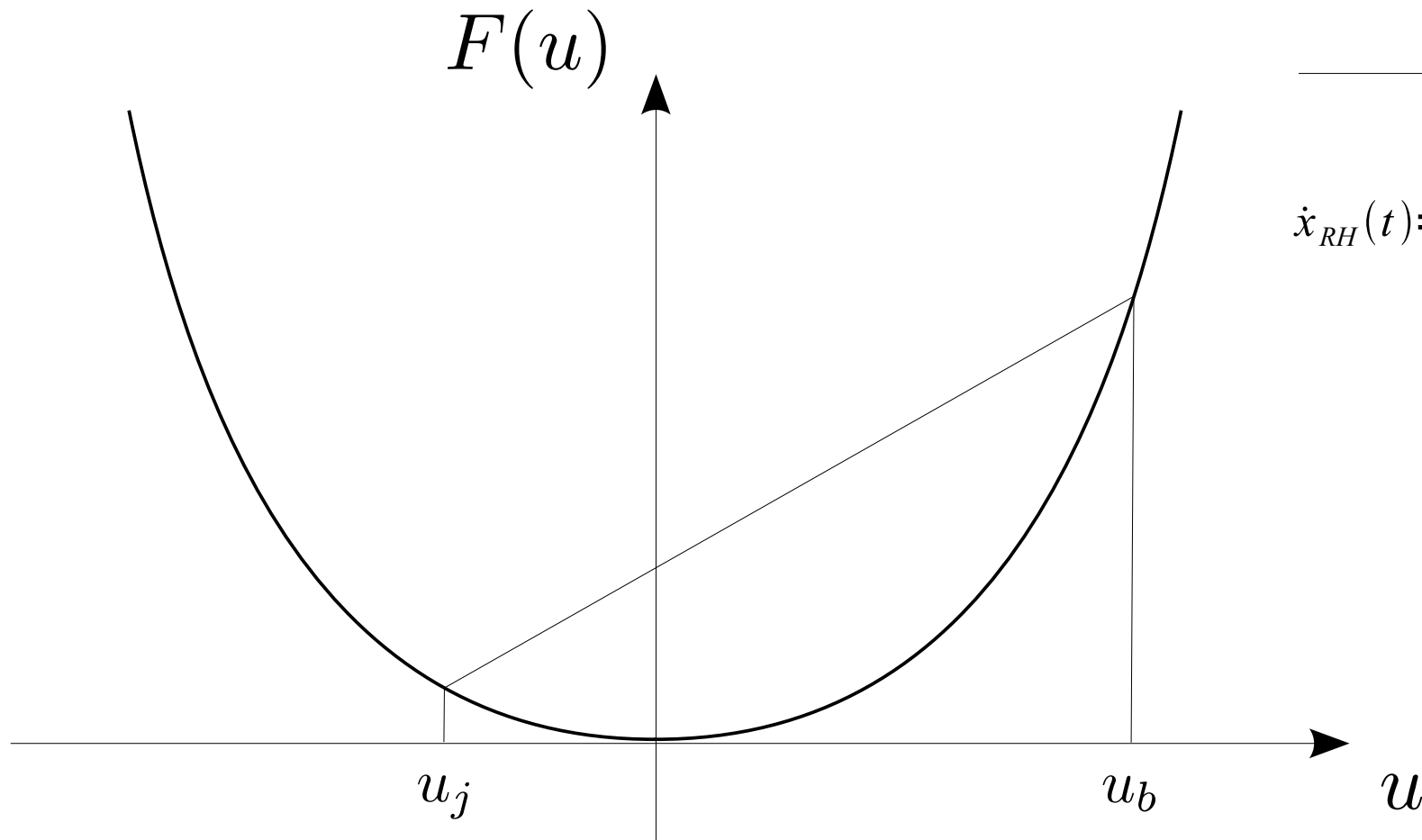
- A továbbiakban vizsgált speciális eset:

$$g(x) = u(x, 0) = \begin{cases} u_b & \text{ha } x < 0 \\ u_j & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

- Kvalitatív vizsgálat alapja:
  - $F'(u)$  adja a karakterisztika irányát
  - lökéshullám esetén a megfelelő húr meredeksége a Rankine-Hugoniot sebesség

# Új módszer - a konvex esetre alkalmazva

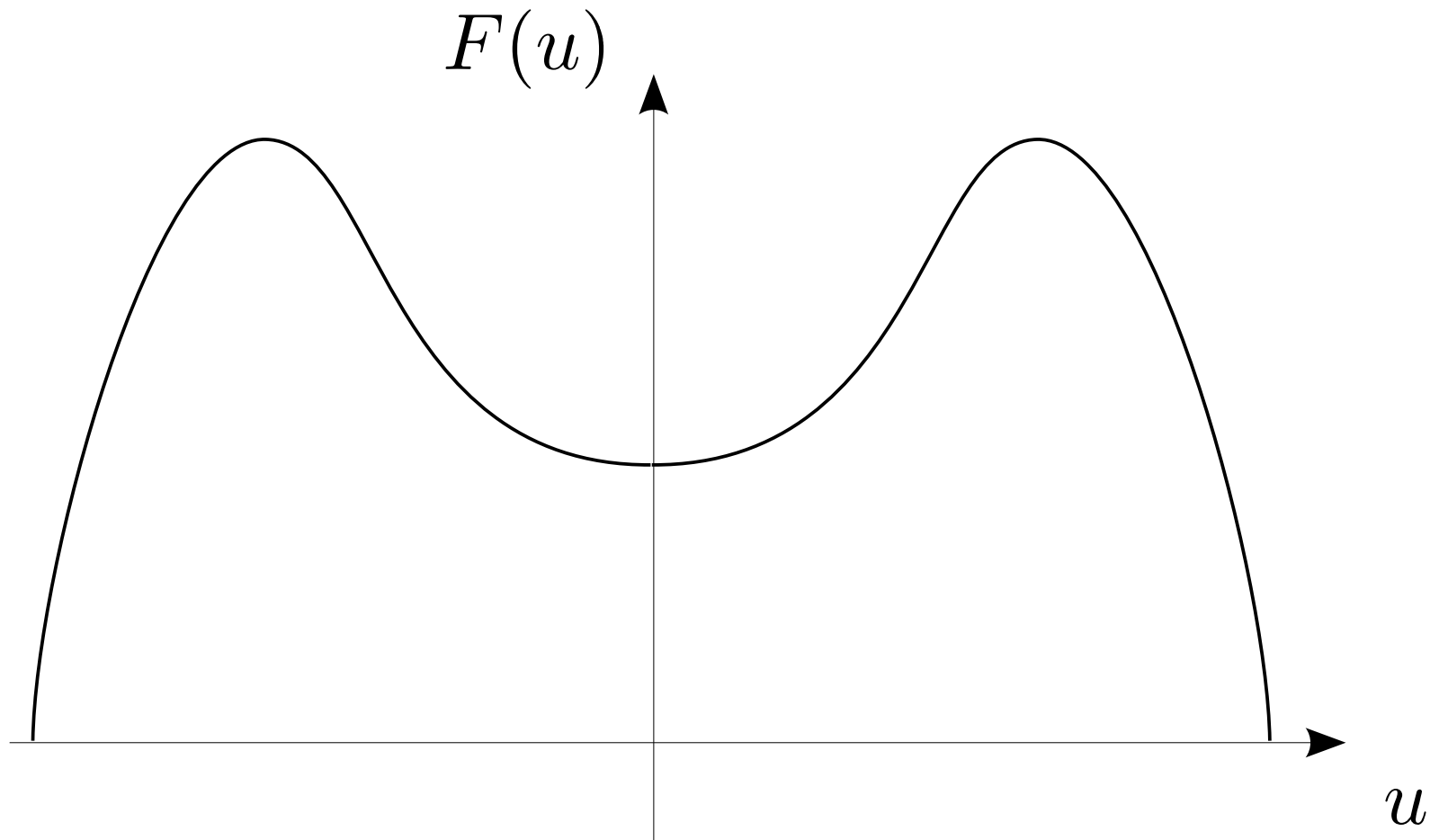
Pl.  $u_j < u_b$ -re



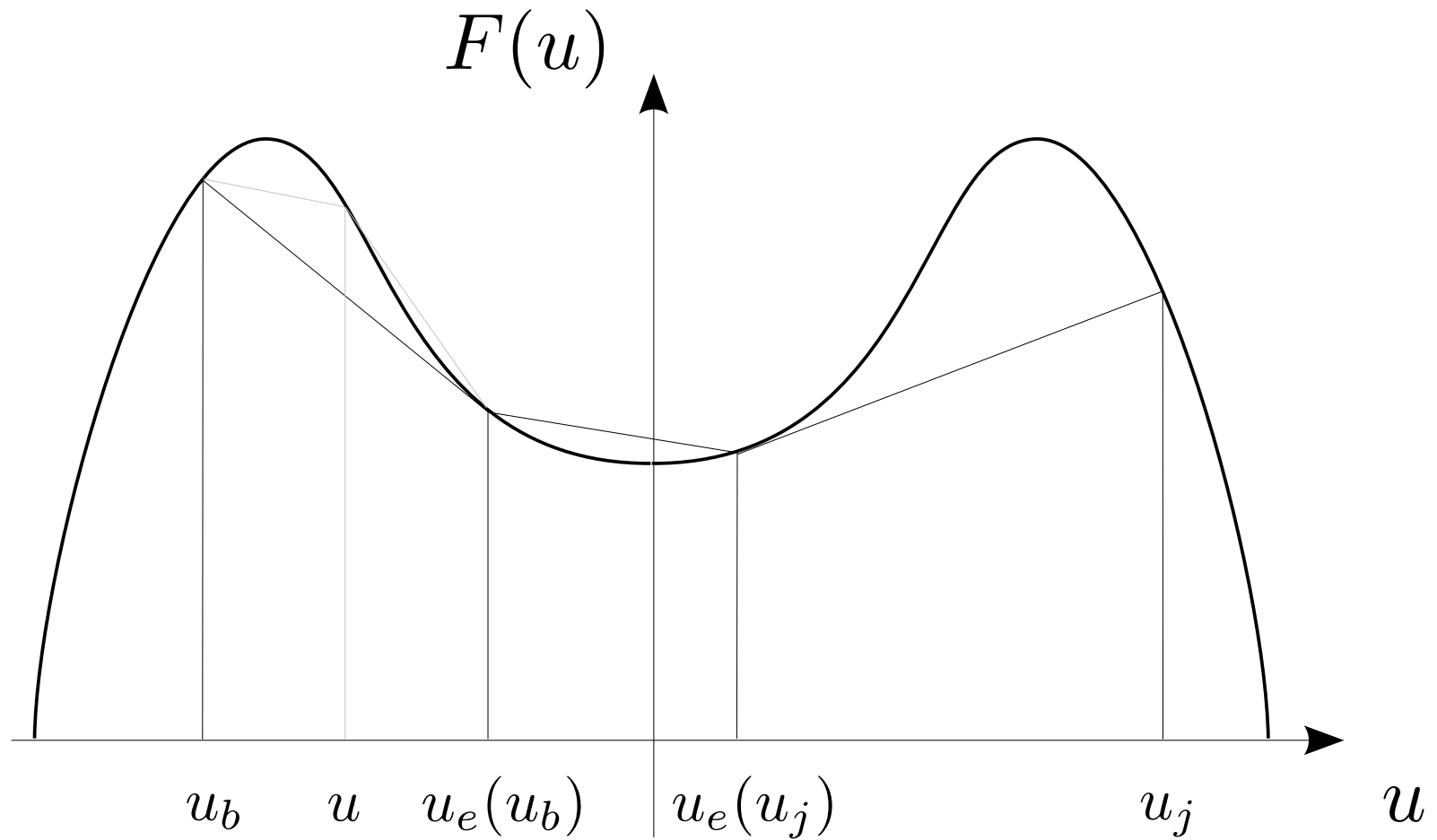
$$\dot{x}_{RH}(t) = \frac{F(u_b) - F(u_j)}{u_b - u_j}$$



# Egy jóval érdekesebb áramfüggvény

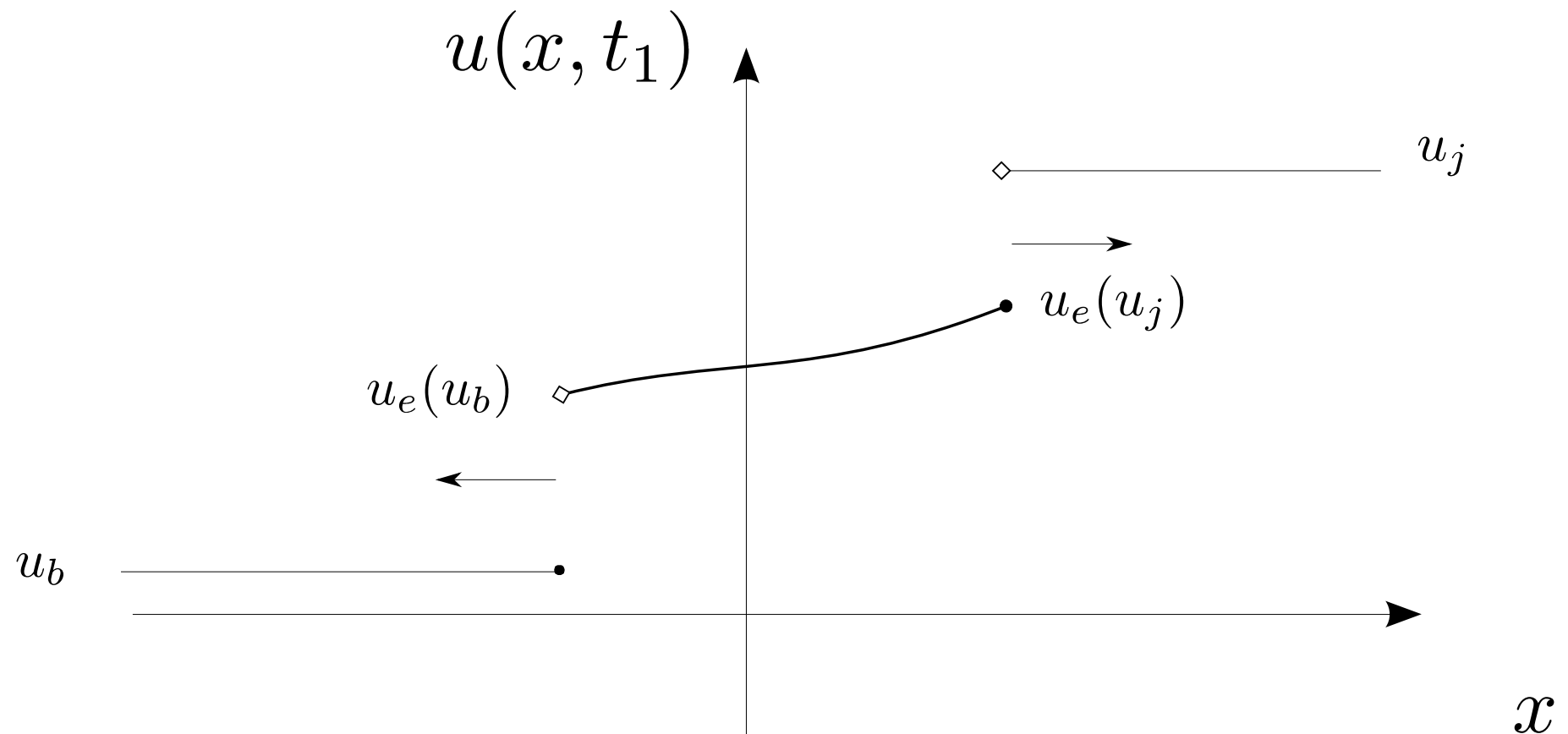


# Egy jóval érdekesebb áramfüggvény



# Konklúzió

- Kvalitatív függvényalak erre az esetre:



# Fázisdiagram

- Sokféle kezdeti érték  $\rightarrow$  fázisdiagram konstruálható

