

Csúcs- és élperkoláció kapcsolata

Boross Péter, Lampert Máté, Mándi Gábor

2009.12.11.



- Néhány fogalom és jelölés
- Csúcsperkoláció megvalósítása
- Él- és csúcsperkoláció kapcsolata
- Összefüggés a kritikus valószínűségek között

Def.: $G = (V, E)$ gráf, ahol V a csúcsok, míg E az élek halmazát jelöli. Például $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$: $x, y \in \mathbb{Z}^d$ csúcsok, $e = \langle x, y \rangle \in \mathbb{E}^d$ az x -et és y -t összekötő él.

Élperkoláció megvalósítása: minden él egymástól függetlenül p valószínűséggel nyitott, $1 - p$ valószínűséggel zárt. A gráf azon összefüggő része, amelyek csak nyitott éleket tartalmaz, *nyitott fürtnek* nevezzük.

Legyen $C(x)$ az a nyitott fürt, amely tartalmazza az x csúcsot. Elég $C(0) \equiv C$ -t vizsgálni (transzláció szimmetria). A fürt *mérete* a csúcsok száma, amelyeket tartalmaz: $|C|$



Kérdés: az origó része-e egy végtelen, nyitott fürtnek? (milyen valószínűséggel)

Def.: Perkolációs valószínűség : $\Theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty)$.

$\Theta(p)$ tulajdonságai:

- monoton növekvő
- folytonos ($19 \geq d \geq 2$)
- $\Theta^{d+1}(p) \geq \Theta^d(p)$
- $\exists p_c : \begin{cases} \Theta(p) = 0 & , p < p_c \\ \Theta(p) > 0 & , p > p_c \end{cases}$

Azaz a kritikus valószínűség: $p_c(d) = \sup\{p : \Theta(p) = 0\}$

- $p_c(d) \geq p_c(d+1)$



Megvalósítás: az élperkolációhoz hasonlóan, de itt a csúcsokat választjuk (színezzük, töröljük stb.)

Azonos módon értelmezhető: $C(x)$, $\Theta^{csúcs}(p)$, $p_c^{csúcs}$

Mi a kettő között a kapcsolat?

Állítás: Minden élperkolációs modell megfeleltethető egy csúcsperkolációs modellnek (másik gráfon), de visszafelé ez nem igaz. A csúcsperkolációs modellek általánosabbak.

Készítsük el a G gráf *fedőgráfját* (G_c) a következő módon:

- G minden éléhez hozzárendeljük G_c egy csúcsát
- G_c két különböző csúcsa akkor és csak akkor szomszédos, ha G -ben a két élnek volt közös csúcsa
- G_c -ben egy csúcs akkor és csak akkor nyílt, ha G -ben a megfelelő él is nyílt
- ezzel G -ben az élekől álló nyílt utak megfelelnek egy-egy G_c -beli csúcsokból álló nyílt útnak (oda-vissza)



Vegyünk egy végtelen, összefüggő gráfot: $G = (V, E)$, és valósítsunk meg rajta egy él- és egy csúcsperkolációt p paraméterrel. Definíció alapján értelmezhetjük $\Theta^{csúcs}(p)$ és $\Theta^{él}(p)$ perkolációs valószínűségeket, valamint a kritikus valószínűségeket:

$$p_c^{él} = p_c^{él}(G) = \sup \left\{ p : \Theta^{él}(p) = 0 \right\}$$

$$p_c^{csúcs} = p_c^{csúcs}(G) = \sup \left\{ p : \Theta^{csúcs}(p) = 0 \right\}$$

A korábbiakból pedig következik, hogy

$$p_c^{él}(G) = p_c^{csúcs}(G_c)$$



De mi az összefüggés $p_c^{csúcs}$ és $p_c^{él}$ között?

Tétel.: Legyen $G = (V, E)$ egy végtelen, összefüggő gráf, 0 origóval, és a csúcsok maximális fokszáma legyen $\Delta (< \infty)$. Ekkor a kritikus valószínűségekre teljesül a következő:

$$\frac{1}{\Delta - 1} \leq p_c^{él} \leq p_c^{csúcs} \leq 1 - \left(1 - p_c^{él}\right)^\Delta$$

Megj:

- $p_c^{csúcs} \leq 1 - \left(1 - p_c^{él}\right)^{\Delta-1}$ is igaz, de ezt nem bizonyítjuk
- $p_c^{él} < p_c^{csúcs}$ is igaz, bizonyos gráftípusokra



Bizonyítás 1.

Órán beláttuk, hogy:

$$\begin{aligned}\Theta(p) &\leq \mathbb{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbb{E}_p(N(n)) = \\ &= \sigma(n) \cdot p^n \leq 2d(2d-1)^{n-1}p^n \rightarrow 0\end{aligned}$$

ha $n \rightarrow \infty$ és $p < \frac{1}{2d-1}$, azaz $p_c \geq \frac{1}{2d-1}$.

Általános esetben a maximális szomszédok száma $\Delta(2d$ helyett), így kapjuk az első egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\Delta-1} \leq p_c^{\text{él}}$$



Bizonyítás 2.

Def.: Legyen adott V két véletlen részhalmaza X és Y . Azt mondjuk, hogy Y *sztochasztikusan dominálja* X -et, ha

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y))$$

minden korlátos, mérhető f függvényre, amelyre $f(A) \leq f(B)$, ha $A \subseteq B \subseteq V$. Ezt $X \leq_{st} Y$ -nal jelöljük.

$$\bullet X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X < a) \geq \mathbb{P}(Y < a), \mathbb{P}(Y = \infty) \geq \mathbb{P}(X = \infty)$$

Legyen $C^{él}(p)$ egy élperkolációs fürt, $C^{csúcs}(p)$ pedig egy csúcsperekolációs fürt, azzal a feltétellel, hogy az origó nyílt.

Állítás:

$$C^{csúcs}(p) \leq_{st} C^{él}(p)$$

$$C^{él}(p) \leq_{st} C^{csúcs}(p') \quad \text{ahol } p' = 1 - (1 - p)^\Delta$$

Mivel

$$\begin{aligned}\Theta^{él}(p) &= \mathbb{P}_p\left(\left|C^{él}(p)\right| = \infty\right) \\ p^{-1}\Theta^{csúcs}(p) &= \mathbb{P}_p\left(\left|C^{csúcs}(p)\right| = \infty\right)\end{aligned}$$

Összevetve az előzőekkel:

$$\frac{\Theta^{csúcs}(p)}{p} \leq \Theta^{él}(p) \leq \frac{\Theta^{csúcs}(p')}{p'} \quad \text{ahol } p' = 1 - (1-p)^\Delta$$

Ebből következik az eredeti állítás:

$$p_c^{él} \leq p_c^{csúcs} \leq 1 - \left(1 - p_c^{él}\right)^\Delta$$



Megkonstruálunk egy párosítást a csúcsok és élek között, hogy bizonyítsuk a következőt:

$$C^{csúcs}(p) \leq_{st} C^{él}(p) \leq_{st} C^{csúcs}(p')$$

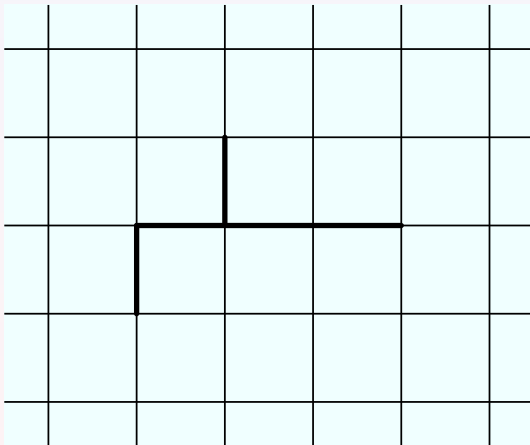
Valósítsunk meg egy élperkolációt a $G = (V, E)$ gráfon p paraméterrel. Legyen $e_1, e_2, \dots$ egy fix rendezése E -nek (éleknek). A k -adik lépésben van két halmazunk: (A_k, B_k) ahol $A_k \subseteq V$, $B_k \subseteq E$.

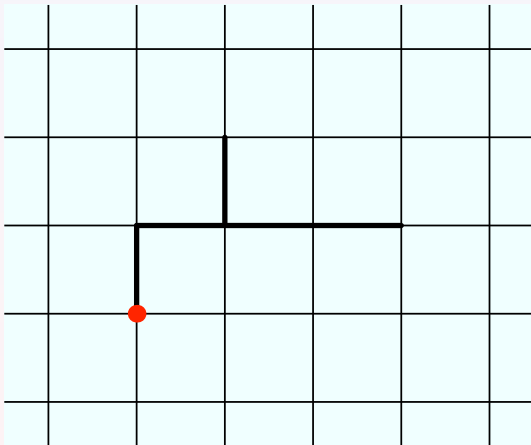
- első lépésben $A_0 = \{0\}$ és $B_0 = \emptyset$.
- megkeressük a rendezésben az első e élt, amelyre $e \notin B_k$, és A_k pontosan egy csúcsába fut (pl. x)

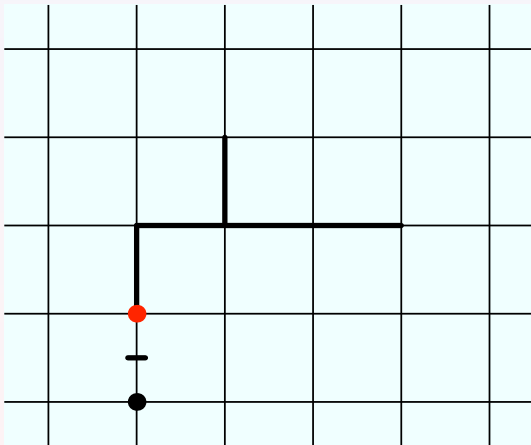
$$A_{k+1} = \begin{cases} A_k & \text{ha } e \text{ zárt} \\ A_k \cup \{x\} & \text{ha } e \text{ nyílt} \end{cases}$$

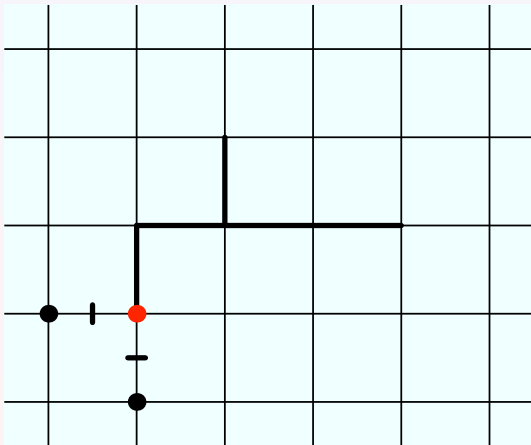
$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k \cup \{e\} & \text{ha } e \text{ zárt} \\ B_k & \text{ha } e \text{ nyílt} \end{cases}$$

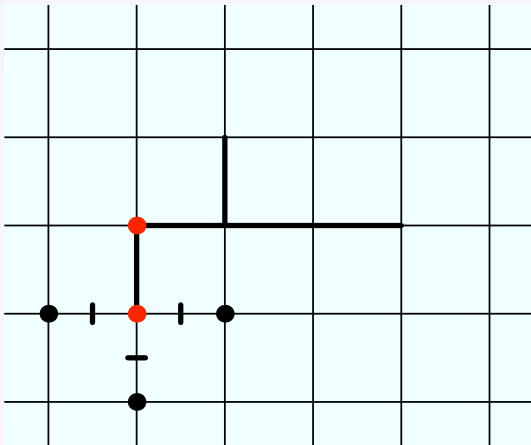
ahol $e = \langle x, y \rangle$

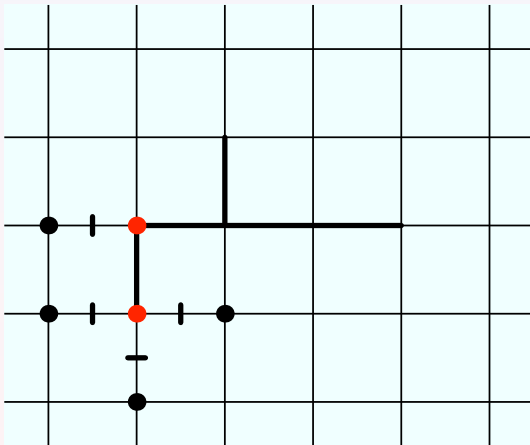


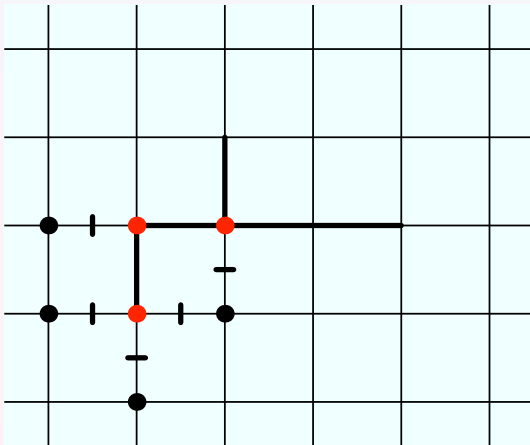


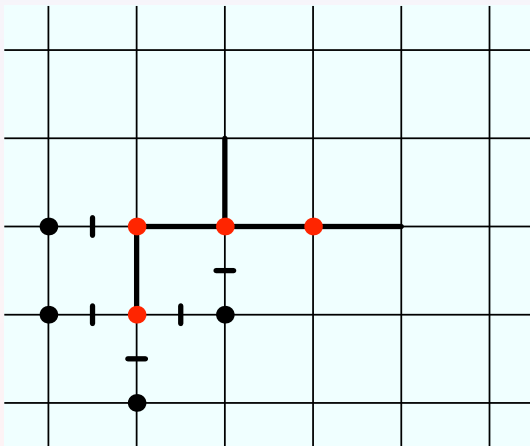


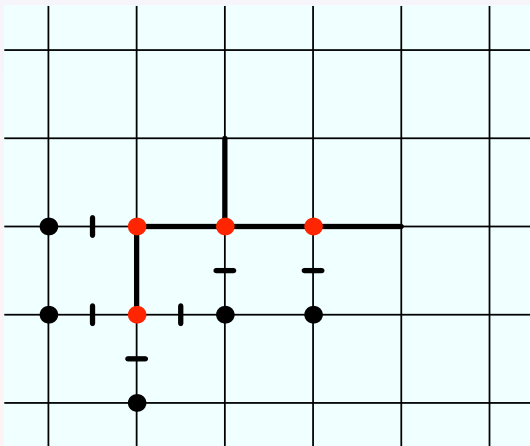


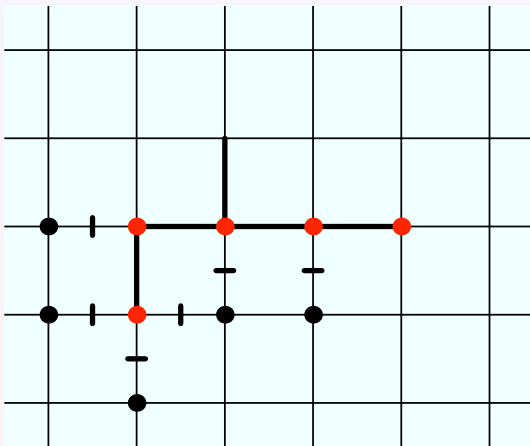


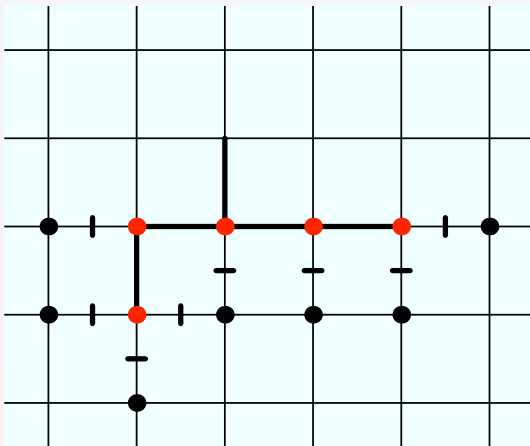


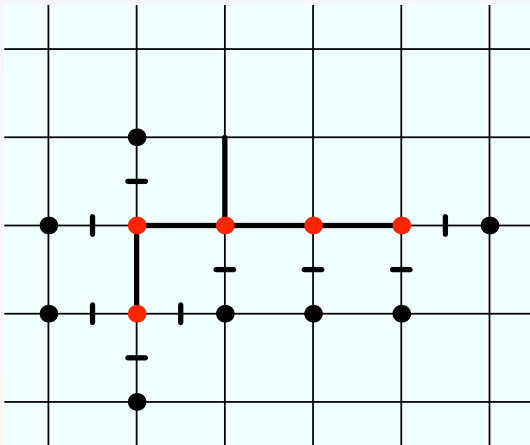


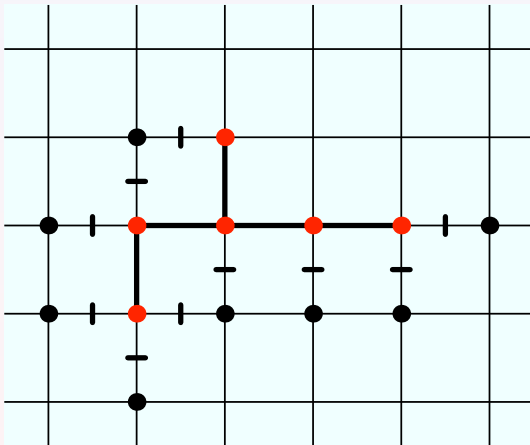


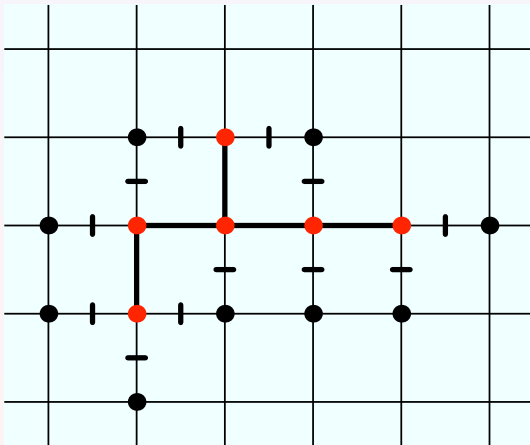


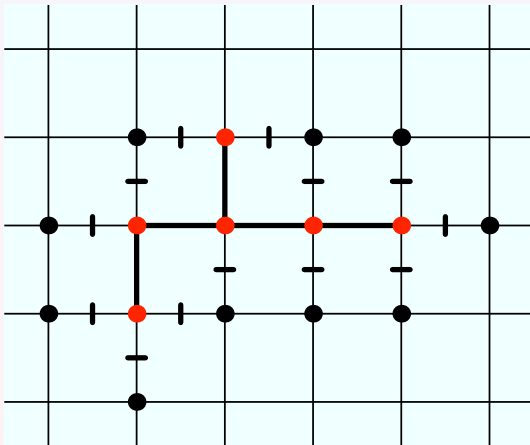


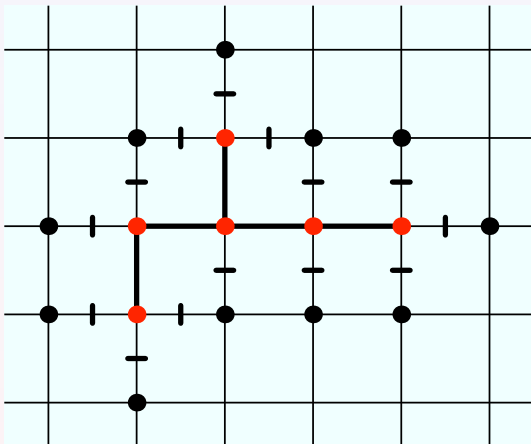












- $A_\infty(\text{piros}) \subseteq A_\infty$
- $A_\infty(\text{piros}) \sim C^{\text{csúcs}}(p)$
- $C^{\text{csúcs}}(p) \leq_{st} C^{\text{él}}(p)$

A konstrukcióból következik, hogy

- A_k és B_k monoton növekvő
- az oriót tartalmazó nyílt fürt: $A_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$

Színezés:

- az origó legyen piros
- minden további y csúcs legyen *piros*, ha az oda vezető e él nyitott
- legyen *fekete*, ha az odavezető él zárt.

Tekintsük most az origót tartalmazó piros fürtöt: $A_\infty(\text{piros})$

- $A_\infty(\text{piros}) \subseteq A_\infty$ és minden csúcs, amely szomszédos $A_\infty(\text{piros})$ valamely csúcsával, de nem eleme annak, szükségszerűen *fekete*
- $A_\infty(\text{piros})$ ugyanolyan eloszlású, mint $C^{csúcs}(p)$



Ezekből következik, hogy $C^{csúcs}(p) \leq_{st} C^{él}(p)$.

Hasonló módon belátható a másik egyenlőtlenség is.

Legyen $\vec{G} = (V, \vec{E})$ egy irányított gráf: minden $e = \langle x, y \rangle$ él helyett két irányított él lesz: $[x, y], [y, x]$. Ezen a gráfon egy *irányított élperkolációt* valósítunk meg.

Színezés:

- az origó legyen zöld
- minden $x (\neq 0)$ csúcs *zöld*, ha legalább egy $f = [y, x]$ él nyitott
- egyébként *fekete*

Ekkor

$$\mathbb{P}_p(x \text{ zöld}) = 1 - (1 - p)^{\rho(x)} \leq 1 - (1 - p)^\Delta$$

ahol $\rho(x)$ az x csúcs fokszáma, $\Delta = \max_x \{\rho(x)\}$



Az előzőekhez hasonlóan felépítjük A_∞ -t a következő különbséggel:

- akkor és csak akkor tekintünk egy $e = \langle x, y \rangle$ ($x \in A_k$, $y \notin A_k$) élt nyitottnak, ha $[x, y)$ nyitott.

Ezután $A_\infty(\text{zöld})$ azon csúcsok halmaza, amelyekből zöld csúcsokon keresztül eljuthatunk az origóba

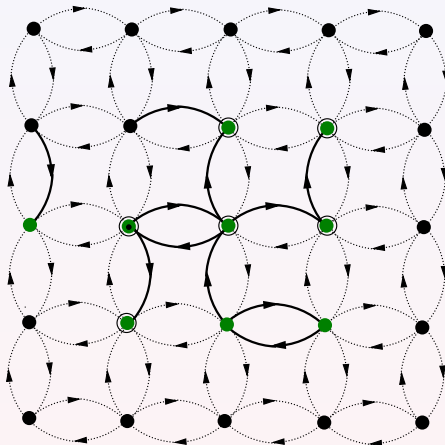
Ekkor

- $A_\infty(\text{zöld}) \supseteq A_\infty$
- $A_\infty(\text{zöld}) \leq_{st} C^{\text{csúcs}}(p')$

Ezekből következik, hogy

$$C^{\text{él}}(p) \leq_{st} C^{\text{csúcs}}(p') \quad \text{ahol } p' = 1 - (1 - p)^\Delta$$





- $A_\infty(\text{zöld}) \supseteq A_\infty$, $A_\infty(\text{zöld}) \leq_{st} C^{csúcs}(p')$
- $C^{él}(p) \leq_{st} C^{csúcs}(p')$

Köszönöm a figyelmet!

