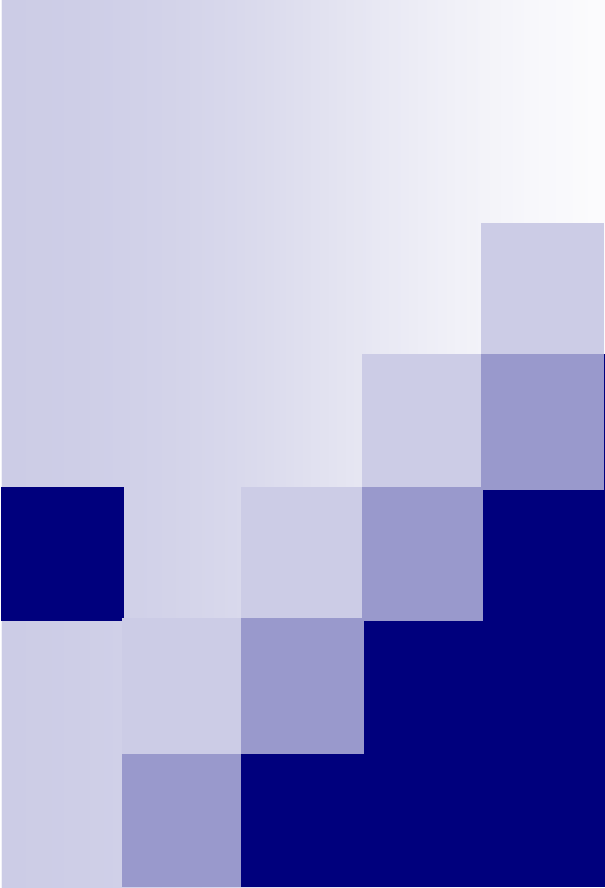




Poisson-folyamatok

Buday Péter
Cserkaszky Áron
Elter Zsolti
Tóta Ádám



Tartalom

- Pont folyamatok
- Homogén Poisson-folyamatok
- Poisson-folyamatok transzformálása
- Inhomogén Poisson-folyamatok
- Színezés
- Rényi modell



Pontfolyamatok 1.

- Célunk véletlen eloszlású pontok modellezése egy téren
- A tér általában $\mathbb{R}^R$ magasabb dimenzióban, vagy $[0, \infty)$
- Alkalmazás: sorban állás, gépek lerobbanásának ideje, földrengések helyének „jóslása”, fák elhelyezkedése egy erdőben



Pontfolyamatok 2.

- Legyen $E \subseteq$ Euklideszi tér, A egy korlátos halmaz E -n, $\{X_n, n \geq 0\}$ véletlen elemei E -nek

- Diszkrét mérték:

$$\varepsilon_{X_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } X_n \in A \\ 0, & \text{ha } X_n \notin A \end{cases}$$

- Számláló mérték:

$$N(A) := \sum_n \varepsilon_{X_n}(A)$$

- Várható érték:

$$\mu(A) = EN(A)$$



Poisson-folyamat 1.

- N pont folyamat E állapottéren
- $\mathcal{E}$ pedig E -beli részhalmazok csoportja (minden jóssággal)
- Ekkor $A \in \mathcal{E}$ esetén N egy μ várható értékű Poisson-folyamat ($\text{PRM}(\mu)$), ha

$$(1) \quad P[N(A) = k] = \begin{cases} \frac{e^{-\mu(A)} (\mu(A))^k}{k!} & \text{ha: } \mu(A) < \infty \\ 0 & \text{ha: } \mu(A) = \infty \end{cases}$$

- (2) ha $A_1, \dots, A_k$ diszjunkt halmazok, akkor $N(A_1), \dots, N(A_k)$ független valószínűségi változók



Poisson-folyamat 2.

- Homogén folyamat: a várható érték konstansszorosa az intervallum Lebesgue mértékének:

$$\exists \alpha > 0 \quad EN(A) = \alpha |A|$$

- Ha $E = [0, \infty)$, akkor ez a ráta



Poisson-folyamat 3.

- Legyen N homogén Poisson folyamat $[0, \infty)$ -n, α rátával, ekkor $EN((0, t]) = \alpha|(0, t]| = \alpha t$
- Annak a vszg-e hogy h intervallumba egy pont esik:

$$P[N((t, t + h]) = 1] = e^{-\alpha h} \alpha h = \alpha h + o(h)$$



Transzformálás 1.

- Érdekes kérdés, hogy mi történik, ha transzformálunk egy Poisson-folyamatot
- E téren μ várható értékű, $\sum_n \varepsilon_{X_n}$ Poisson-folyamat

$$T : E \mapsto E' \quad A' \subset E'$$

$$T^{-1}(A') = \{e \in E : T(e) \in A'\}$$

$$N'(A') = N(T^{-1}(A'))$$

$$\mu'(A') = \mu(T^{-1}(A'))$$



Transzformálás 2.

$$\{X'_n\} = \{T(X_n)\}$$

$$\begin{aligned} N'(A') &= N(T^{-1}(A')) = \sum_n \varepsilon_{X_n}(T^{-1}(A')) = \sum_n 1_{[X_n \in T^{-1}(A')]} = \\ &= \sum_n 1_{[T(X_n) \in A']} = \sum_n \varepsilon_{T(X_n)}(A') \end{aligned}$$

Tétel: ha T olyan térképezése E -nek E' -re, hogy ha $B' \subset E'$ zárt E' -n, akkor $T^{-1}B' := \{e \in E : Te \in B'\}$ is zárt E -n; ekkor, ha $N \text{ PRM}(\mu)$ E -n, $\{X_n\}$ pontokkal, akkor $N' := N \circ T^{-1}$ is $\text{PRM}(\mu')$ $\{T(X_n)\}$ pontokkal, ahol: $\mu' := \mu \circ T^{-1}$



Transzformálás 3.

Bizonyítás:

$$N = \sum_n \varepsilon_{X_n}$$

$$N' = \sum_n \varepsilon_{TX_n}$$

$$(1): \quad P[N'(B') = k] = P[N(T^{-1}(B')) = k] = p(k, \mu(T^{-1}(B')))$$

$$(2): \quad N'(B'_1), \dots, N'(B'_m) = N(T^{-1}(B'_1)), \dots, N(T^{-1}(B'_m))$$

Tehát (1) és (2) teljesül.



Transzformálás 4.

■ Példák

□ Legyen $Tx = x^2$ ekkor

$$\mu'[0, t] = \mu\{x : Tx \leq t\} = \mu[0, \sqrt{t}] = \sqrt{t}$$

□ Legyen $Tx = e^x$ ekkor

$$\mu'(a, b] = \mu\{x : e^x \in (a, b]\} = \log b - \log a$$



Inhomogén Poisson-folyamat 1.

- N Poisson-folyamat $[0, \infty)$ halmazon abszolút folytonos μ -vel, és $\alpha(t)$ időfüggő rátával

- Legyen $m(t) = \mu[0, t] = \int_0^t \alpha(s) ds$

inverze pedig $m^{\leftarrow}(x) = \inf\{u : m(u) \geq x\}$

- Ha $\sum_n \varepsilon_{\Gamma_n}$ homogén Poisson, akkor $N' = \sum_n \varepsilon_{m^{\leftarrow}(\Gamma_n)}$ is Poisson-folyamat



Inhomogén Poisson-folyamat 2.

■ Kis h intervallumra:

$$\begin{aligned}P[N((t, t + h]) = 1] &= \mu((t, t + h]) \exp\{-\mu((t, t + h])\} \\&= \mu((t, t + h]) + o(h) \\&= \int_t^{t+h} \alpha(u) du + o(h) \\&= \alpha(t)h + o(h)\end{aligned}$$

$$P[N((t, t + h]) \geq 2] = o(h)$$



Inhomogén Poisson-folyamat 3.

- Példa: periodikus kereslet

$$\alpha(t) = 2 + \sin t$$

$$m(t) = \int_0^t (2 + \sin s) ds = 2t + 1 - \cos t$$

Színezés 1.

- Tétel: legyen $\{X_n\} \in E_1$ és $\sum_n \varepsilon_{X_n}$ PRM(μ), és $\{J_n\} \in E_2$ f.a.e.v. F eloszlásfüggvénnyel. Ekkor $\sum_n \varepsilon_{(X_n, J_n)}$ PRM($\mu \times F$).

$$\mu \times F(A_1 \times A_2) = \mu \times F((e_1, e_2) : e_1 \in A_1, e_2 \in A_2) = \mu(A_1)F(A_2)$$

$$\begin{aligned} E \sum_n \varepsilon_{(X_n, J_n)}(A_1 \times A_2) &= \sum_n P[(X_n, J_n) \in (A_1 \times A_2)] \\ &= \sum_n P[X_n \in A_1]P[J_n \in A_2] \\ &= \sum_n P[X_n \in A_1]P[J_1 \in A_2] \\ &= E \sum_n \varepsilon_{X_n}(A_1)P[J_1 \in A_2] = \mu(A_1)P[J_1 \in A_2] \end{aligned}$$



Színezés 2.

- Példa: telefonközpontba érkező hívások

$\sum_n \varepsilon_{(X_n, J_n)}$ Poisson-folyamat

$\sum_n \varepsilon_{X_n + J_n}$ is Poisson-folyamat



Rényi-féle közlekedési model

- Végtelen autópályára Poisson-folyamat szerint autók: $\{X_n\}$ helyen, f.a.e.v. sebességgel: $\{V_n\}$.

Ekkor $N_0 = \sum_n \varepsilon_{(X_n(0), V_n)}$ Poisson-folyamat, és $N_t = \sum_n \varepsilon_{(X_n(t), V_n)}$ is Poisson-folyamat. Legyen T_n azaz időpont, mikor az n . autó áthalad a 0 ponton. Ekkor belátható, hogy $\sum_n \varepsilon_{T_n}$ is Poisson-folyamat. Ennek a várható értéke $\alpha \langle v \rangle t$.



Köszönjük szépen a figyelmet!