

Poisson-féle integrál formula és alkalmazásai példákon

Gerényi Anita Szita Zsófia

Feller Zoltán Kocsis Vilmos

2009.10.30



BEVEZETÉS

Poisson-féle integrál formula

- Mire is jó az?
 - A Dirichlet probléma megoldására az egység körön (később kissé általánosabbá tesszük).
 - Előállíthatjuk az $u(z)$ harmonikus függvény egységgömbbeli értékeit az egységgörön felvett függvényértékekkel (integrálás).
- Cauchy-tételből:
$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt$$
 - Itt $u(z)$ harmonikus egy olyan tartományon, mely tartalmazza a $S_1(0)$ -t. Ez egyébként a Poisson-formula egy speciális alakja.

Poisson-féle integrál formula (levezetés alapötlete)

Tekintsük az alábbi transzformációt: $|z| < 1$

$$\Phi_{-z_0}(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad |z| < 1$$

- Erre a transzformációra: $S_1(0) \rightarrow S_1(0)$ és $C_1(0) \rightarrow C_1(0)$
- Analitikus, és harmonikussal vett kompozíciója is harmonikus.
- Továbbá: $U(z) = u \circ \Phi_{-z_0}(z)$
- És: $U(0) = u \circ \Phi_{-z_0}(0) = u(z_0)$

Ez is volt a célunk ezzel a transzformációval, ugyanis $U(0) = u(z_0)$ esetén felhasználhatjuk az előbbi összefüggést az $u(z_0)$ értékek előállítására a körlapon belül.

Poisson-féle integrál formula (levezetés)

- Kifejtve:

$$u(z_0) = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ \Phi_{-z_0}(e^{it}) dt$$

- Hajtsuk végre egy változócserét: $e^{is} = \Phi_{-z_0}(e^{it})$

$$\Phi_{z_0}(e^{is}) = e^{it} \Rightarrow \Phi'_{z_0}(e^{is}) i e^{is} ds = i e^{it} dt \Rightarrow \frac{\Phi'_{z_0}(e^{is})}{e^{it}} e^{is} ds = dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\Phi'_{z_0}(e^{is})}{\Phi_{z_0}(e^{is})} e^{is} ds$$

– Itt $\Phi_{z_0} = (\Phi_{-z_0})^{\text{inv}}$, $\Phi_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$, $\Phi'_{z_0}(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \overline{z_0}z)^2}$ és így:

$$\frac{\Phi'_{z_0}(e^{is})}{\Phi_{z_0}(e^{is})} e^{is} = e^{is} \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \overline{z_0}e^{is})(e^{is} - z_0)} = \frac{1 - |z_0|^2}{(e^{-is} - \overline{z_0})(e^{is} - z_0)} = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{is} - z_0|^2}$$

Poisson-féle integrál formula és alternatív alakjai

Behelyettesítés után:

$$u(z_0) = \frac{1 - |z_0|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{is})}{|e^{is} - z_0|^2} ds, \quad |z_0| < 1$$

Ez a **Poisson-féle integrál formula**.

Más alakok:

$$u(z) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{is})}{|Re^{is} - z|^2} ds, \quad |z| < R$$

$$u(re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{R^2 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

megj.: $r=0$ esetén ez a korábbi Cauchy-tétel

TRANSZFORMÁCIÓ A FELSŐ FÉLSÍKRA

Dirichlet-probléma a felső félsíkon

- Probléma:
 - $\Delta u(x + iy) = 0$ megoldását keressük a felső félsíkon.
 - Adott $u(x) = f(x)$ peremfeltétel a valós tengelyen, $f(x)$ korlátos és szakaszonként folytonos.
- Vezessük vissza az előző esetre!
 - Tekintsük a következő lineáris törtleképzést:
$$\omega = \psi(z) = \frac{i - z}{i + z}$$
 - A valós egyenest az egységkörvonalba, a felső félsíkot a kör belsejébe képi.
 - $s \in \mathbb{R}$ képe a körvonalon : $e^{i\phi} := \psi(s)$

Az integrálformula levezetése

- $u(z) = U(\omega) = U(\psi(z))$
- A ω -síkon a $\Delta U(\omega) = 0$ megoldása
 $U(e^{i\phi}) = f(\psi^{-1}(e^{i\phi}))$ peremfeltétellel ismert, a megoldást a Poisson-féle integrál formula adja meg:

$$u(x+iy) = U(\psi(x+iy)) = U(\psi(z)) = \frac{1-|\psi(z)|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi^{-1}(e^{i\phi}))}{|e^{i\phi} - \psi(z)|^2} d\phi$$

- Változócsere: $s = \psi^{-1}(e^{i\phi})$, $d\phi = \frac{2}{1+s^2} ds$, ezzel

$$u(x+iy) = \frac{1-|\psi(z)|^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{|e^{i\phi} - \psi(z)|^2} \frac{ds}{1+s^2}$$

Poisson-féle integrál formula a felső félsíkon

- Közvetlen számolással belátható:

$$\frac{1 - |\psi(z)|^2}{|e^{i\phi} - \psi(z)|^2} = (1 + s^2) \frac{y}{(x - s)^2 + y^2}$$

- A végeredmény a **Poisson-féle integrál formula**:

$$u(x + iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{(x - s)^2 + y^2} ds = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x - s)}{s^2 + y^2} ds$$

- Poisson-mag: $P_y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}$

Konvolúciós képlet

- Ezt felhasználva:

$$u(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) P_y(x - s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - s) P_y(s) ds$$

A megoldás a peremfeltétel és a Poisson-mag konvolúciója.

PÉLDA

Poisson integrál formula alkalmazása

Példa: Dirichlet probléma megoldása a felső félsíkra a következő határfeltétellel:

$$f(x) = u(x) = \begin{cases} C & , \text{ha } a < x < b \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases}$$

Alkalmazzuk a formulát:

$$u(x + i \cdot y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds = \frac{y}{\pi} \int_a^b \frac{C}{(x-s)^2 + y^2} ds$$

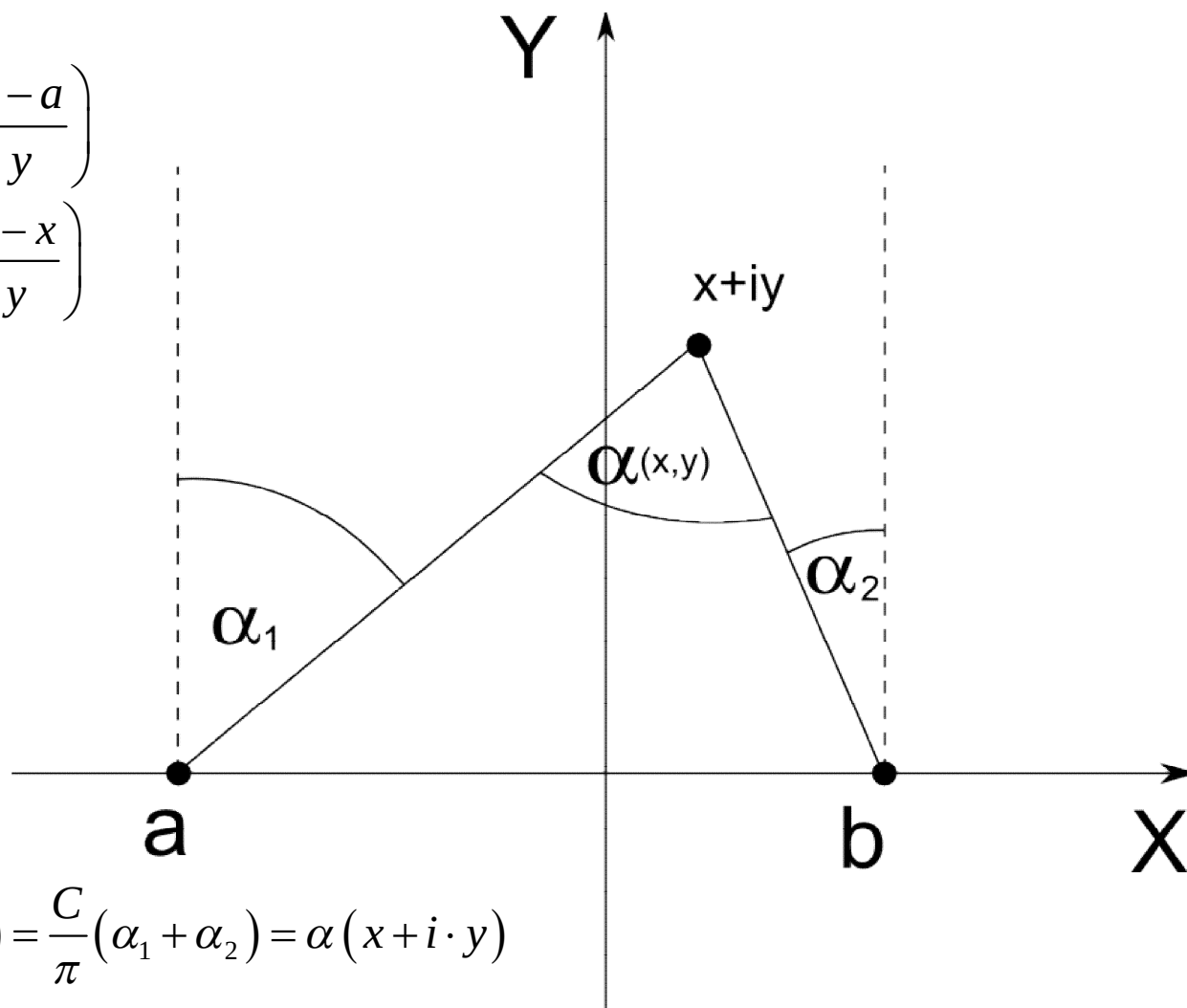
Elvégezve az integrálást:

$$u(x + i \cdot y) = \dots = \frac{C}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{b-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{x-a}{y}\right) \right]$$

Szemléletes kép

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{b-x}{y}\right)$$



$$u(x+i \cdot y) = \frac{C}{\pi}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha(x+i \cdot y)$$

Poisson integrál formula alkalmazása

- Példa: Dirichlet-probléma a felső félsíkon az alábbi peremfeltétellel (Poisson hőmérsékleti eloszlás):

$$f(x) = u(x) = P_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

- Felírva az integrálformulát:

$$u(x + iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_a(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds = \frac{ay}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s^2 + a^2)((x-s)^2 + y^2)}$$

$$h(z) = \frac{1}{(x^2 + a^2)((x-z)^2 + y^2)}$$

Poisson integrál formula alkalmazása

- A valós tengelyen vett integrál kiszámítható a felső félsíkon vett kontúrintegrál segítségével. ($-R$ -től R -ig a valós tengelyen, és R sugarú félkör, majd $R \rightarrow \infty$).
- $h(z)$ -nek egyszeres pólusa van $z = ia$ és $z = x + iy$ pontokban.
- $h(z)$ residuumai:

$$\operatorname{Res}(h(z), ia) = \frac{1}{(x - ia)^2 + y^2} \frac{1}{2ia}$$

$$\operatorname{Res}(h(z), x + iy) = \frac{1}{(x + iy)^2 + a^2} \frac{1}{2iy}$$

Poisson integrál formula alkalmazása

- Res-tétel, és az integrál a félkörön eltűnik:

$$u(x+iy) = \frac{ay}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2\pi i (\operatorname{Re} s(h(z), ia) + \operatorname{Re} s(h(z), x+iy)) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a+y}{x^2 + (a+y)^2}$$

$$u(x+iy) = P_{a+y}(x)$$

- Tehát a hőmérséklet eloszlása a valós tengellyel párhuzamos egyeneseken $a+y$ paraméterű Poisson.