

Markov folyamatok és martingálok (BME TE95MM07) ütemterv

Balázs Márton

2010 ősz

Alább egy nagyon hozzávetőleges ütemterv, a félév elején finomodni fog még, aztán úgyse pont így sikerül majd. A *Tematika és irodalomjegyzék* a honlapról részletesebb információt ad az anyagról.

-vel kezdődő hét	Téma	Beadandó
Szept. 6.	Feltételes várható é., konvergenciatípusok, martingálok	-
Szept. 13.	Martingáltételek, egyszerűbb alkalmazások	1. HF: 09.15
Szept. 20.	Martingáltételek, egyszerűbb alkalmazások	2. HF: 09.22
Szept. 27.	További martingál alkalmazások	3. HF: 10.04
Okt. 4.	További martingál alkalmazások	4. HF: 10.06
Okt. 11.	Sztoch. foly. ergodtételek. Martingál CHT.	5. HF: 10.13
Okt. 18.	Markov láncok, elnyelési valószínűségek	6. HF: 10.20
Okt. 25.	Markov láncokban martingálok, elnyelési valószínűségek	ZH: 10.25, 8:30
Nov. 1.	Elnyelési valószínűségek, megállási idők	7. HF: 11.03
Nov. 8.	Markov lánc rekurenciája; elektromos áramkörök	-
Nov. 15.	Elektromos áramkörök	8. HF: 11.15!!
Nov. 22.	Elektromos áramkörök; Markov CHT; Pontfolyamatok, Poisson folyamat, jelölés, ritkítás, pontfolyamatok transzformációi	9. HF: 11.22!!, 10. HF: 11.24
Nov. 29.	Poisson folyamat transzformációi, származtatott folyamatok	11. HF: 12.01
Dec. 6.	Poisson folyamat további tulajdonságai, rekordok	12. HF: 12.08

Házi feladatok

Markov folyamatok és martingálok, 2010 ősz

12 darab, összesen 10 pontos feladatsor lesz. Minden feladat annyi pontot ér, amennyi • látható mellette.

1. HF: (beadási határidő: szeptember 15.)

HF 1.1 •• Legyenek $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, melyekre tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X|Y) = Y$ m.b., és $\mathbf{E}(Y|X) = X$ m.b. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X = Y\} = 1$. (Tipp (bár máshogy is lenne szép megoldás, ha $\mathcal{L}^2$ -beliséget is feltettünk volna): tekintsük a

$$\mathbf{E}(X - Y; X > c, Y \leq c) + \mathbf{E}(X - Y; X \leq c, Y \leq c)$$

kifejezést.)

HF 1.2 •• Legyen $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn σ -algebra. Ha X már $\mathcal{G}$ -mérhető, akkor $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = X$, ami azt sugallja, hogy az $X \mapsto \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ leképezés egyfajta projekció. Mutassuk meg, hogy valóban: az $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ Hilbert-téren (skalárszorítás az $\langle X, Y \rangle_{\mathbf{P}} = \mathbf{E}(XY)$) ez a leképezés ortogonális projekció az $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ altérre.

HF 1.3 ••• Mutassuk meg, hogy $X_n \rightarrow X$ valószínűségben pontosan akkor, ha X_n minden részsorozatának van további részsorozata, amely m.b. konvergál X -hez.

HF 1.4 ••• Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ fae., standard normális változók. (Emlékezzünk, hogy momentumgeneráló függvényük $\mathbf{E}(e^{\lambda \xi_i}) = e^{\lambda^2/2}$.) Legyenek továbbá $a, b \in \mathbb{R}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad \text{és} \quad X_n = e^{aS_n - bn}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$X_n \rightarrow 0 \text{ m.b.} \Leftrightarrow b > 0,$$

de $r \geq 1$ -re

$$X_n \rightarrow 0 \text{ } \mathcal{L}^r\text{-ben} \Leftrightarrow r < \frac{2b}{a^2}.$$

2. HF: (beadási határidő: szeptember 22.)

HF 2.1 •• Legyen S_n egy egyszerű, szimmetrikus bolyongó távolsága az origótól a síkbeli négyzetrácson n lépés után. Legyen $\nu_r = \inf\{n : S_n > r\}$.

- (a) Mutassuk meg, hogy $S_n^2 - n$ martingál.
- (b) Mutassuk meg, hogy $r^{-2}\mathbf{E}(\nu_r) \rightarrow 1$ amint $r \rightarrow \infty$.

HF 2.2 •• A feladat ugyanez, de ezúttal a síkbeli bolyongó lépései függetlenek, egységnyi hosszúak, és irányuk egyenletes eloszlású.

HF 2.3 ••• Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos $\text{Exp}(1)$ eloszlású valószínűségi változók, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\{\mathcal{F}_n\}$ a természetes filtráció. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{n!}{(1 + S_n)^{n+1}} e^{S_n}$$

martingál $\{\mathcal{F}_n\}$ -re nézve.

HF 2.4 ••• Egy urnában n fehér és n fekete golyó van. Visszatevés nélkül sorra kihúzzuk őket. Fekete golyó húzásakor 1 forintot fizetünk, fehér golyó esetén 1 forintot kapunk. Jelölje X_i a pénzünket i golyó húzása után ($X_0 = 0$). Legyen

$$Y_i = \frac{X_i}{2n - i} \quad (1 \leq i \leq 2n - 1), \quad \text{illetve} \quad Z_i = \frac{X_i^2 - (2n - i)}{(2n - i)(2n - i - 1)} \quad (1 \leq i \leq 2n - 2).$$

- (a) Mutassuk meg, hogy Y_i és Z_i martingál.
- (b) Határozzuk meg X_i szórásnégyzetét.

3. HF: (beadási határidő: október 4.)

HF 3.1 ••• *A log-optimalis portfólió, avagy Bellman optimalitási elv.* Az n -edik fogadás során egységnyi fogadási összeg nyeresége ξ_n , ahol $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}\{\xi_n = +1\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = q$, $q + p = 1$, $p > 1/2$. Magyarul: $q < 1/2$ valószínűséggel elveszítjük a befizetett összeget és $p = 1 - q > 1/2$ valószínűséggel a dupláját nyerjük vissza. Az n -edik fogadás során C_n összegre fogadunk. Y_0 a kezdeti vagyonunk és Y_n -el jelöljük az n -edik fogadás eredményhirdetése utáni teljes vagyonunkat. Nyilván: $0 \leq C_n \leq Y_{n-1}$, $n > 0$. Célunk: rögzített N számú fogadás során maximalizálni az $\mathbf{E} \log(Y_N/Y_0)$ várható nyereség rátánkat. $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a folyamat természetes filtrációja.

- (a) Bizonyítandó, hogy tetszőleges jósolható C_n fogadási stratégia mellett $Z_n := \log Y_n - n\alpha$ szuper-martingál, ahol $\alpha = p \log p + q \log q + \log 2$. Ebből következik, hogy $\mathbf{E} \log(Y_N/Y_0) \leq N\alpha$.
- (b) Ám létezik olyan fogadási stratégia, amely mellett a fenti Z_n martingál. Tehát a várható nyereség ráta fenti optimális felső korlátja megfelelő stratégia választással elérhető.

HF 3.2 ••• *A fogadó tönkremenetele.* Legyenek $X_1, X_2, \dots$ faevv., $\mathbf{P}\{X_i = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_i = -1\} = q$, ahol $0 < p = 1 - q < 1$, és $p \neq q$. Legyenek továbbá $0 < a < b$ egészek, és

$$S_n := a + X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad T := \inf\{n : S_n = 0 \text{ vagy } S_n = b\}.$$

- (a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}T < \infty$. *Tipp: volt erre egy egyszerű lemmánk.*
- (b) Bizonyítsuk be, hogy

$$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \quad \text{és} \quad N_n := S_n - n(p - q)$$

mindketten martingálok (a természetes filtrációra nézve).

- (c) Határozzuk meg a $\mathbf{P}\{S_T = 0\}$ tönkremenési valószínűséget, és a játék $\mathbf{E}T$ várható időtartamát.

HF 3.3 ••• *Azuma-Höfding egyenlőtlenség.*

- (a) Legyen $c > 0$, és $-c \leq Y \leq c$ nulla várható értékű valószínűségi változó. Ekkor minden $\theta \in \mathbb{R}$ -re

$$\mathbf{E}e^{\theta Y} \leq \cosh(\theta c) \leq e^{\theta^2 c^2 / 2}.$$

Tipp: minden konvex f függvényre – például az $e^{\theta \cdot}$ függvényre is – igaz, hogy

$$f(y) \leq \frac{c - y}{2c} \cdot f(-c) + \frac{c + y}{2c} \cdot f(c).$$

ha $-c \leq y \leq c$.

- (b) Legyen M egy martingál, melyre $M_0 = 0$, és valamely $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra $|M_n - M_{n-1}| \leq c_n$, $\forall n$. Ekkor minden $x > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \leq n} M_k \geq x\right\} \leq e^{-x^2/(2 \sum_{k=1}^n c_k^2)}.$$

Tipp: kövessük az iterált logaritmus tétel bizonyítása ① részének gondolatmenetét.

4. HF: (beadási határidő: október 6.)

HF 4.1 *Doob opcionális megállási tétel kiterjesztése.* Legyen $\tau \geq 0$ megállási idő, $\mathbf{E}\tau < \infty$. Vegyük észre, hogy $\{\tau \geq k\} = \bigcap_{i=0}^{k-1} \{\tau \neq i\} \in \mathcal{F}_{k-1}$.

(a)^{••} Az

$$|X_{\tau \wedge n} - X_0| = \left| \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) \cdot \mathbf{1}\{\tau \geq k\} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |X_k - X_{k-1}| \cdot \mathbf{1}\{\tau \geq k\}$$

egyszerű észrevétel és Doob opcionális megállási tétele (iii) pontjának bizonyítása alapján mutassuk meg, hogy ha X supermartingál, melyre van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{E}(|X_k - X_{k-1}| | \mathcal{F}_{k-1}) \leq C \quad \forall k > 0, \text{ m.b.,}$$

akkor $\mathbf{E}X_\tau \leq \mathbf{E}X_0$. Martingál esetén természetesen egyenlőség van.

(b)^{••} Hasonlóan, ha $M_0 = 0$, lássuk be, hogy

$$(1) \quad M_{\tau \wedge n}^2 = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})^2 \cdot \mathbf{1}\{\tau \geq k\} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (M_i - M_{i-1}) \cdot (M_j - M_{j-1}) \cdot \mathbf{1}\{\tau \geq j\},$$

$$(2) \quad M_\tau^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k - M_{k-1})^2 \cdot \mathbf{1}\{\tau \geq k\} + 2 \sum_{1 \leq i < j < \infty} (M_i - M_{i-1}) \cdot (M_j - M_{j-1}) \cdot \mathbf{1}\{\tau \geq j\},$$

(a szummák m.b. véges sok tagból állnak). Legyen M martingál, melyre $M_0 = 0$, és van $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$|M_k - M_{k-1}| \leq C \quad \forall k > 0, \text{ biztosan.}$$

(Nyilván ezt lehetne gyengíteni, de most elégedjünk meg ennyivel.) Feltesszük továbbá, hogy $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$. Ekkor lássuk be, hogy (1) jobb oldalának első szummája monotonon konvergál (2) jobb oldalának első szummájához melynek várható értéke véges, a második szummák várható értéke pedig nulla mindkét esetben. *Tipp: Fubini tétel.* Vonjuk le a következtetést: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}M_{\tau \wedge n}^2 = \mathbf{E}M_\tau^2$.

HF 4.2 *Wald azonosságok.* Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ faevv.-k $\mathcal{L}^1$ -ben, $\mu := \mathbf{E}Y_i$, és $\tau \geq 1$ megállási idő (a természetes σ -algebra szerint), $\mathbf{E}\tau < \infty$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Mutassuk meg, hogy

(a)[•] ekkor $\mathbf{E}S_\tau = \mu \cdot \mathbf{E}\tau$.

(b)^{••} Ha Y_i korlátos és $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$ is teljesül (nyilván ezeket lehetne gyengíteni, de most elégedjünk meg ennyivel), $\sigma^2 := \mathbf{D}^2 Y_i$, akkor $\mathbf{E}(S_\tau - \mu\tau)^2 = \sigma^2 \cdot \mathbf{E}\tau$. (Ezt általában a $\mu = 0$ esetben szokás használni.)

Tipp: Használjunk martingált, és az előző feladat két részét.

HF 4.3 *Repül az egyenletes, ki tudja hol áll meg...* Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ faevv., Egyenletes(0, 1) eloszlással.

Legyen $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$, és $\tau := \min\{n : S_n > 1\}$.

(a)[•] Mutassuk meg, hogy rögzített $0 \leq z \leq 1$ -re $\mathbf{P}\{S_n < z\} = z^n/n!$. *Figyelem, ez nem igaz $z > 1$ esetén!*

(b)[•] Határozzuk meg $\mathbf{E}\tau$ -t. *Tipp: τ nemnegatív, úgyhogy lehet farokvalószínűségeket összegezni. A farokvalószínűségek viszont szoros összefüggésben vannak az (a) feladattal.*

(c)[•] Mivel τ megállási idő, a Wald azonosság alapján számoljuk ki $\mathbf{E}(S_\tau - 1)$ -et, azaz, hogy várhatóan hol van a faevv. egyenletes időközű felújítási folyamatban az 1 után következő első felújítási időpont.

5. HF: (beadási határidő: október 13.)

HF 5.1 •• *A Black-Scholes lemma második fele.* Legyen $N > 0$ egész, és

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N : \omega_i = \pm 1\},$$

$\mathcal{F}$ a természetes σ -algebra, $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\omega_i\}_{i=1}^n)$, és $\mathbf{P}$ a szorzatmérték, mely szerint ω_i -k fae., $\mathbf{P}\{\omega_i = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{\omega_i = -1\}$. Legyen továbbá M egy martingál az $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrációra nézve. Órán láttuk, hogy van olyan jósolható H folyamat, hogy

$$M = M_0 + H \bullet Z, \quad \text{azaz} \quad M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n H_k \cdot (Z_k - Z_{k-1}) \quad (0 \leq n \leq N),$$

ahol

$$Z_k = \sum_{i=1}^k (\omega_i - 2p + 1).$$

A feladat belátni H egyértelműségét.

HF 5.2 ••• *Szóegyezés.* Egy s elemű ABC-ből függetlenül, egyenletes eloszlással írunk n betűt egymás mögé. Legyen B egy adott, $k \leq n$ hosszúságú szó, és X az a szám, ahányszor B előfordul az n hosszú betűsorozatunkban. (Átfedés is lehetséges, pl. a $B = AJJAJ$ $k = 5$ hosszú szó kétszer fordul elő az $n = 11$ hosszú, $BAJJAJJAJDF$ sorozatban.). Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\left\{\left|X - (n - k + 1)\left(\frac{1}{s}\right)^k\right| \geq \varepsilon\right\} \leq 2e^{-\varepsilon^2/2nk^2}.$$

HF 5.3 *Golyók és urnák finomítása.* m golyót egymástól függetlenül, egyenletesen elhelyezünk n urnába. Legyen $\mathcal{F}_i$ az első i golyó helye által generált σ -algebra, és $M_i = \mathbf{E}(F | \mathcal{F}_i)$, ahol F az üres urnák száma az utolsó golyó elhelyezése után. Legyen Y_i az üres urnák száma az i . lépés után ($i = 0, \dots, m$). Mutassuk meg, hogy

$$(a) \bullet \quad M_i = Y_i \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-i};$$

$$(b) \bullet \bullet \quad |M_i - M_{i-1}| \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-i};$$

$$(c) \bullet \bullet$$

$$\mathbf{P}\{|F - \mu| \geq \varepsilon\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2(n-1/2)}{n^2 - \mu^2}},$$

$$\text{ahol } \mu = \mathbf{E}F = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m.$$

6. HF: (beadási határidő: október 20.)

HF 6.1 •• Legyen $\Omega = \mathbb{Z}$, és T az eltolás: $Tn = n + 1$ ha $n \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}$ -n nincs eltolás-invariáns valószínűségi mérték.

HF 6.2 *Ergodicitás játékmódel.* Legyen $N > 0$ egész, $\mathcal{X} = \{0, 1\}^N$, és $\varrho \in [0, 1]$. A *Bernoulli*(ϱ) szorzatmérték $\mathcal{X}$ -en az a $\mathbf{P}^{(\varrho)}$ eloszlás, mely szerint

$$\mathbf{P}^{(\varrho)}\{\underline{x}\} = \varrho^{\sum_{i=1}^N x_i} \cdot (1 - \varrho)^{\sum_{i=1}^N (1-x_i)}, \quad \underline{x} \in \mathcal{X}.$$

Nagyon formálisan, de csak annyi van ideírva, hogy N urna mindegyikében egymástól függetlenül ϱ valószínűséggel van egy golyó, $1 - \varrho$ valószínűséggel nincs golyó.

Definiáljuk a következő, $\mathcal{X}$ -ben haladó folyamatot: minden lépésben egyenletesen és mindentől függetlenül választunk egy permutációt az $\{1, 2, \dots, N\}$ számok $N!$ permutációja közül, és az aktuális állapotot ezzel megpermutáljuk, azaz az n . lépésben

$$\underline{X}(n) \mapsto \underline{X}(n+1); \quad X_i(n+1) = X_{\pi_i(n)}(n), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad n \in \mathbb{Z},$$

ahol a $\pi(n)$ permutációk különböző n -ekre függetlenek. Azaz: az urnákat golyóstul megpermutáljuk minden lépésben függetlenül, így kapjuk a következő 0-1 sorozatot az előzőből.

(a) •• Mutassuk meg, hogy minden $0 \leq \varrho \leq 1$ esetén a *Bernoulli*(ϱ) eloszlás stacionárius eloszlása az $\underline{X}(n)$ folyamatnak.

- (b)•• Ergodikus-e a Bernoulli(ρ) eloszlás ezzel a dinamikával? (Pontosabban a Bernoulli(ρ) kezdeti eloszlás és a dinamika által indukált eloszlás a trajektóriák terén ergodikus-e?) Ha igen, miért, ha nem, mik az extrémális valószínűségi mértékek, ők miért extrémálisak, és hogyan keverhető ki belőlük a Bernoulli(ρ) eloszlás? *Indokoljunk!*
- (c)•• Legyen f annak indikátora, hogy (a nulla időben) van az első urnában golyó, azaz

$$f : \Omega \rightarrow \{0, 1\} \quad ; \quad f(\{\underline{X}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}) = X_1(0).$$

Határozzuk meg f ergodikus átlagát, azaz a

$$g = g(\{\underline{X}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_1(i) \quad \text{m.b.}$$

valószínűségi változót, mint a trajektóriák (azaz elemi események) függvényét. Mik az invariáns halmazok, és igaz-e, hogy g ezekre mérhető? *Indokoljunk!*

- (d)• Határozzuk meg g eloszlását, ha a rendszer Bernoulli(ρ) eloszlásban fejlődik.
- (e)• Mi köze van a fenti válaszoknak a folyamat irreducibilis komponenseihez? *Megjegyzés: e játékmodellben ez triviális, de az élet persze nem mindig ilyen egyszerű.*

7. HF: (beadási határidő: november 3.)

HF 7.1 Legyen $\mathcal{X} = [0, 1]$ az $1/2\pi$ sugarú körvonal, melynek 0 és 1 pontjait azonosítjuk egymással. Legyenek V_i , $i = 1, 2, \dots$ független, $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen $X_{n+1} = X_n + V_n \bmod 1$, $n \geq 0$.

- (a)• Mutassuk meg, hogy $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ egy Markov lánc az $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ állapotterén, $\mathcal{B}$ a Borel σ -algebra.
- (b)•• Határozzuk meg a $\pi(x, A)$ átmenetmagot, ha $x \in \mathcal{X}$ és $A \in \mathcal{B}$. Pontosabban: legyen $0 < a < 1$, és határozzuk meg az $\int_0^a \pi(x, dy) = \pi(x, [0, a])$ valószínűséget.
- (c)• Keressük meg a Markov lánc (egy) μ stacionárius eloszlását.
- (d)• Ergodikus-e a Markov lánc az előbb talált stacionárius eloszlásban?

HF 7.2 •••• Az $\mathcal{X} = \{-1, 2\}$ kételemű állapotterén tekintsük azt a Markov láncot, melynek átmenetmátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Az órán tanultak mentén bizonyítsunk CHT-t magára az X_n Markov láncra az ő stacionárius eloszlásában, adjuk meg a CHT-ban szereplő szórást is. (Tipp: keressük meg a mátrix bal oldali sajátvektorait, az ezekre való felbontás segítségével a $\mathbf{P}\{X_n = i \mid X_0 = j\}$ valószínűségek expliciten számolhatók ($i, j = -1$ vagy 2). Ezért a feltételes várható értékek is expliciten számolhatók, és erre volt szükség az órán látott sémához (X_n felbontása egy stacionárius Z_n folyamat növekményére és egy martingálnövekményre). Ezután jöhet a martingál CHT.)

8. HF: (beadási határidő: november 15.)

HF 8.1 Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ egy Markov lánc egy megszámlálható $\mathcal{X}$ halmazon, melynek átmenetvalószínűsége π és stacionárius eloszlása μ .

- (a)•• Mutassuk meg, hogy az időmegfordítás, azaz az a leképezés, ami $\{X_n\}$ -t $\{X_{-n}\}$ -be viszi, a Markov láncot átviszi egy $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}})$ láncba, melynek szintén μ a stacionárius eloszlása, $\hat{\pi}$ átmenetvalószínűségei viszont nem feltétlenül egyeznek meg az eredeti π -vel. Határozzuk meg $\hat{\pi}$ -ot μ és π segítségével.
- (b)•• Mutassuk meg, hogy a feltételes várható érték leképezés: $\Pi : f(\cdot) \mapsto \sum_y f(y)\pi(\cdot, y)$ egy kontrakció $\mathcal{L}^p(\mu)$ -n, minden $p \in [1, \infty]$ -re.
- (c)•• Azt mondjuk, hogy a Markov lánc *reverzibilis*, ha az (a) részben szereplő megfordított $\hat{\mathbf{P}}$ meg egyezik az eredeti $\mathbf{P}$ -vel. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor történik meg, ha Π önadjungált $\mathcal{L}^2(\mu)$ -n.

HF 8.2 A Médiarendőrség a TV nézéssel kapcsolatban a következő állapotokat figyelte meg: 0 (sosem néz TV-t), 1 (csak közszolgálati műsorokat néz), 2 (gyakran TV-zik), 3 (függő), 4 (viselkedési zavarok

figyelhetők meg), 5 (agyhalott). Ezen állapotok közti átmeneteket egy Markov láncsal lehet modellezni, melynek átmenetmátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) •• 1-es állapotból indulva, mi a valószínűsége, hogy az 5-ös állapot előbb bekövetkezik, mint a 0-s, azaz, hogy egy közszolgálati műsorokat néző agyhalottként végzi?
- (b) •• Várhatóan mennyi ideig tart amíg egy közszolgálati műsorokat néző leszokik a TV-zésről, vagy pedig eléri az agyhalott állapotot?

9. HF: (beadási határidő: november 22.)

HF 9.1 Legyen X_n egy irreducibilis Markov lánc, mely a nemnegatív egész számokon lépked, és átmenetvalószínűségei nullák, ha nem szomszédos egészek között vannak: $\pi(i, j) = 0$, ha $|i - j| \neq 1$.

- (a) • Mutassuk meg, hogy amennyiben van stacionárius eloszlás (azaz a lánc pozitív rekurrens), akkor a lánc reverzibilis.
- (b) •• Ennek segítségével határozzuk meg a stacionárius eloszlást, mint az átmenetvalószínűségek függvényét.
- (c) • Adjunk feltételt az átmenetvalószínűségekre, melyek garantálják, hogy a lánc pozitív rekurrens, illetve nem pozitív rekurrens.
- (d) • Amennyiben van stacionárius eloszlás, akkor írjuk fel a láncnak megfelelő ellenálláshálózatot, mint az átmenetvalószínűségek függvényét.
- (e) • Adjunk feltételt az átmenetvalószínűségekre, melyek garantálják, hogy a lánc rekurrens, illetve tranziens.

HF 9.2 Az előző feladatban legyen

$$\pi(i, j) := \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 0, j = 1; \\ \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{i}, & \text{ha } i > 0, j = i + 1; \\ \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{i}, & \text{ha } i > 0, j = i - 1; \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \quad \left(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}\right).$$

- (a) •• Mutassuk meg, hogy a lánc pozitív rekurrens, ha $\alpha < -1/4$, és nem pozitív rekurrens, ha $\alpha > -1/4$.
- (b) •• Mutassuk meg, hogy a lánc rekurrens, ha $\alpha < 1/4$, és tranziens, ha $\alpha > 1/4$.

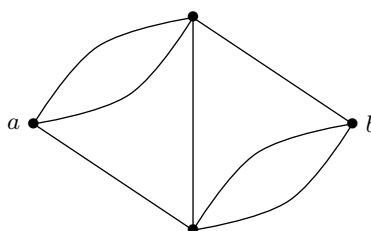
10. HF: (beadási határidő: november 24.)

HF 10.1 •• Legyen X_n egy egyszerű bolyongás egy véges összefüggő gráfon, melynek csúcsait 1-től n -ig megszámoztuk, és a csúcsok fokszámai $d_1, \dots, d_n$. Mutassuk meg, hogy a

$$\mu(i) := \frac{d_i}{\sum_{j=1}^n d_j}$$

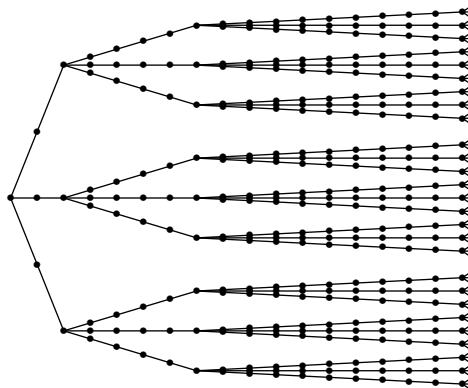
eloszlás a bolyongás stacionárius eloszlása, és a lánc reverzibilis.

HF 10.2 Legyen X_n egy egyszerű bolyongás az alábbi gráfon:



- (a) • Határozzuk meg a Markov láncnak megfelelő ellenálláshálózatot.
- (b) •• Az ellenálláshálózat segítségével minden x csúcsra határozzuk meg a $\mathbf{P}_x\{\tau_a < \tau_b\}$ valószínűségeket.
- (c) •• Az ellenálláshálózat segítségével minden x csúcsra határozzuk meg, hogy várhatóan hányszor jár ott a lánc, mielőtt b -ben elnyelődik, ha a -ból indul.

HF 10.3 ••• Tekintsük azt a fát, mely a gyökértől d élben indul, majd mindegyik él irányában egy a_1 hosszúságú lánc következik, melynek végén ismét d felé ágazik a fa, minden irányban a_2 hosszú lánc, újra d felé ágazás, stb. Egy példa, melyben $d = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$, $\dots$:



Határozzuk meg mi az a feltétel d -re és az $\{a_i\}$ sorozatra, mely eldönti, hogy ezen a fán az egyszerű bolyongás tranziciens vagy rekurrens.

11. HF: (beadási határidő: december 1.)

HF 11.1 ••• 7.2-es feladat újra, ezúttal az órán látott markovi módszerrel.

HF 11.2 Tekintsük a következő bolyongást a nemnegatív egészekben:

$$\pi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } x = y \geq 0. \\ \frac{1-\delta}{4} & \text{ha } y = x+1, x \geq 1, \\ \frac{1+\delta}{4} & \text{ha } y = x-1, x \geq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0, y = 1. \end{cases}$$

- (a)•• Mutassuk meg, hogy a lánc pozitív rekurrens, és határozzuk meg a μ stacionárius eloszlást.
- (b)• Legyen f egy kompakt tartójú függvény a nemnegatív egészekben, és U egy megoldása az $[I - \Pi]U = f$ egyenletnek. π alakját felhasználva mutassuk meg, hogy ez az egyenlet egy lineáris másodrendű rekurzió. (Ezért aztán minden f -re van megoldása.)
- (c)• Íme egy **hibás** (!!) érvelés: szorozzuk meg a fenti egyenletet a stacionárius μ eloszlással, majd összegezzünk:

$$\begin{aligned} \sum_{x,y=0}^{\infty} \mu(y)(\delta_{yx} - \pi(y, x))U_x &= \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y)f(y) \\ \sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)U_x - \sum_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{y=0}^{\infty} \mu(y)\pi(y, x) \right) U_x &= \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y)f(y) \\ \sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)U_x - \sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)U_x &= \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y)f(y) \\ 0 &= \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y)f(y), \end{aligned}$$

ami persze nem stimmelhet, hiszen f tetszőleges kompakt tartójú függvény. Hol a hiba az érvelésben?

- (d)•• Tegyük rendbe a dolgokat. Mivel f kompakt tartójú, vegyünk egy olyan a -t, hogy $f(z) = 0$ ha $z \geq a$. A fenti egyenletet összegezzük a -ig csak, a jobb oldalon nem számít, hogy a -ig megyünk vagy ∞ -ig. A bal oldalon írjuk fel az összegzést $a-1$ -ig, és válasszuk külön az a -dik

- tagot. Kihasználva, hogy $\pi(y, x) = 0$ ha $|x - y| > 1$, és azt, hogy μ stacionárius, a bal oldal jelentősen egyszerűsödik. π és μ konkrét alakját beírva (és a határok környékén nagyon figyelve) végül mutassuk meg, hogy U exponenciálisan növekszik nagy a -kra, vagy konstanshoz tart, és ez utóbbi pontosan akkor történik, ha $\sum_x f(x)\mu(x) = 0$.
- (e)• Tudunk-e centrális határeloszlástételt bizonyítani a $\sum_{j=0}^n f(X_j)$ mennyiségre, ha $\sum_x f(x)\mu(x) = 0$?

12. HF: (beadási határidő: december 8.)

- HF 12.1 •• *Rényi forgalommodell.* Kezdetben az autók egy mindkét irányban végtelen autópályán vannak elhelyezve, homogén, α intenzitású N_0 Poisson folyamat szerint. Az autók eme véletlen kezdő helyzeteit X_n -ek jelölik. Mindegyik autó kap egy mindentől független, véletlen $-\infty < V_n < \infty$ kezdősebességet, és ezzel a sebességgel egyenletesen halad az autópályán (negatív sebesség azt jelenti, hogy balra megy az autó). Feltesszük, hogy $\mathbf{E}|V_1| < \infty$, és az autók sosem ütköznek, a modellben inkább áthaladnak egymáson.
- (a) Mi az autók N_t helyzetének eloszlása t -kor?
- (b) Legyen T_n az a(z esetleg negatív) időpillanat, amikor az n . autó áthalad az origón. Határozzuk meg a $\sum_n \epsilon_{T_n}$ pontfolyamat eloszlását.
- HF 12.2 •• *M/G/ ∞ sor.* Hívások homogén, α intenzitású Poisson folyamat szerint kezdődnek $(0, \infty)$ -ben. Minden hívás hossza mindentől független, G eloszlású. Legyen $N(t)$ a t -kor folyamatban levő hívások száma. Határozzuk meg $N(t)$ eloszlását egy adott t esetén.
- HF 12.3 •• Tekintsük az $N = \sum_n \epsilon_{X_n}$ Poisson folyamatot $(0, \infty]$ -en, melynek intenzitás-mértéke $\mu(dx) = \alpha x^{-\alpha-1} dx$, ha $x > 0$; itt $\alpha > 0$ paraméter. Legyen $Y_1 = \sup_n X_n$ a legnagyobb pont, és Y_2 a második legnagyobb pont (ezek m.b. léteznek, miért is?). Határozzuk meg Y_1 és Y_2 együttes eloszlását.
- HF 12.4 • *Harry és a jégeső;* ez is Resnick 1992. Harry éttermének laposteteje van, mely jégesőben fokozott veszélynek van kitéve. Amikor jégeső esik a tetőre, kárt okoz a közvetlen becsapódás, de ezután visszapattan a jég szem, és másodszor is becsapódva ismét megüti a tetőt. Harry és a biztosítási szakember is egyetértenek, hogy az elsődleges becsapódások síkbeli Poisson folyamat szerint hagytak nyomot a tetőn. Azonban Harry úgy gondolja, hogy az összes becsapódásnyom, tehát az elsődleges és a másodlagos becsapódások nyomai együttesen is Poisson folyamatot alkotnak. A biztosítási szakember ezzel nem ért egyet. Melyiküknek van igaza?
- HF 12.5 ••• Egy önkiszolgáló üzlethez homogén α intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek az ügyfelek. A j . ügyfél V_j ideig vásárol, azután F_j ideig fizet (sor nincs). A $\{V_j, F_j\}_j$ valószínűségi változó párosok különböző j -kre függetlenek, és a Poisson folyamattól is függetlenek, egyazon j -re viszont V_j és F_j egymástól általában nem függetlenek. Legyenek $X(t)$ illetve $Y(t)$ a vásárlással illetve fizetéssel foglalkozó vásárlók száma t -kor. Határozzuk meg $X(t)$ és $Y(t)$ együttes eloszlását V_j és F_j együttes eloszlásának függvényében.