Markov folyamatok és martingálok (BMETE95MM07) ütemterv

Balázs Márton
2012 ősz

Alább egy nagyon hozzávetőleges ütemterv, a félév elején finomodni fog még, aztán úgyse pont így sikerül majd. A *Tematika és irodalomjegyzék* a honlapról részletesebb információt ad az anyagról.

-vel kezdődő hét	**Téma**	**Beadandó**
Szept. 3.	Feltételes várható é., konvergenciatípusok, martingálok	-
Szept. 10.	Martingáltételek, egyszerűbb alkalmazások	**1. HF**: 09.12
Szept. 17.	Martingáltételek, egyszerűbb alkalmazások	**2. HF**: 09.19
Szept. 24.	**- Szerda kari szünet -** További martingál alkalmazások	
Okt. 1.	További martingál alkalmazások	**3. HF**: 10.02; **4. HF**: 10.03
Okt. 8.	Sztoch. foly. ergodtételek	**5. HF**: 10.10
Okt. 15.	Sztoch. foly. ergodtételek, martingál CHT	Szerda **ZH**
Okt. 22.	**- Kedd ünnep -** Martingál CHT, szubadditív ergodtétel	**6. HF**: 10.24
Okt. 29.	Szubadditív ergodtétel, Markov láncokban martingálok, elnyelési valószínűségek, megállási idők	**7. HF**: 10.31
Nov. 5.	Markov lánc rekurrenciája; Markov CHT	**8. HF**: 11.07
Nov. 12.	Elektromos áramkörök **- Szerda TDK konf. -**	**9. HF**: 11.13 (!!)
Nov. 19.	Elektromos áramkörök; Pontfolyamatok, Poisson folyamat, jelölés, ritkítás, pontfolyamatok transzformációi	**10. HF**: 11.21
Nov. 26.	Poisson folyamat transzformációi, származtatott folyamatok	**11. HF**: 11.28
Dec. 3.	Poisson folyamat további tulajdonságai, rekordok	**12. HF**: 12.04

Házi feladatok

Markov folyamatok és martingálok, 2012 ősz

Minden feladat annyi pontot ér, amennyi • látható mellette.

1. HF: (beadási határidő: szeptember 12.)

HF 1.1 ••• Legyenek X, $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, melyekre tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X|Y) = Y$ m.b., és $\mathbf{E}(Y|X) = X$ m.b. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X = Y\} = 1$. (*Tipp (bár máshogy is lenne szép megoldás, ha $\mathcal{L}^2$-beliséget is feltettünk volna): tekintsük a*

$$\mathbf{E}(X - Y\,;\, X > c,\, Y \le c) + \mathbf{E}(X - Y\,;\, X \le c,\, Y \le c)$$

kifejezést.)

HF 1.2 ••• Legyen $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ az $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn σ-algebra. Ha X már $\mathcal{G}$-mérhető, akkor $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) = X$, ami azt sugallja, hogy az $X \mapsto \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})$ leképzés egyfajta projekció. Mutassuk meg, hogy valóban: az $\mathcal{L}^2(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbf{P})$ Hilbert-téren (skalárszorzás az $\langle X,\, Y\rangle_{\mathbf{P}} = \mathbf{E}(XY)$) ez a leképzés ortogonális projekció az $\mathcal{L}^2(\Omega,\, \mathcal{G},\, \mathbf{P})$ altérre.

HF 1.3 •••• Legyenek $\xi_1,\, \xi_2,\, \dots$ fae., standard normális változók. (Emlékezzünk, hogy momentumgeneráló függvényük $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda\xi_i}) = \mathrm{e}^{\lambda^2/2}$.) Legyenek továbbá $a,\, b \in \mathbb{R}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \qquad \text{és} \qquad X_n = \mathrm{e}^{aS_n - bn}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$X_n \to 0 \text{ m.b.} \Leftrightarrow b > 0,$$

de $r \ge 1$-re

$$X_n \to 0\ \mathcal{L}^r\text{-ben} \Leftrightarrow r < \frac{2b}{a^2}.$$

2. HF: (beadási határidő: szeptember 19.)

HF 2.1 •• Legyen S_n egy egyszerű, szimmetrikus bolyongó távolsága az origótól a síkbeli négyzetrácson n lépés után. Legyen $\nu_r = \inf\{n : S_n > r\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy $S_n^2 - n$ martingál.

(b) Mutassuk meg, hogy $r^{-2}\mathbf{E}(\nu_r) \to 1$ amint $r \to \infty$.

HF 2.2 •• A feladat ugyanez, de ezúttal a síkbeli bolyongó lépései függetlenek, egységnyi hosszúak, és irányuk egyenletes eloszlású.

HF 2.3 ••• Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos Exp(1) eloszlású valószínűségi változók, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\{\mathcal{F}_n\}$ a természetes filtráció. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{n!}{(1+S_n)^{n+1}}\mathrm{e}^{S_n}$$

martingál $\{\mathcal{F}_n\}$-re nézve.

HF 2.4 ••• Egy urnában n fehér és n fekete golyó van. Visszatevés nélkül sorra kihúzzuk őket. Fekete golyó húzásakor 1 forintot fizetünk, fehér golyó esetén 1 forintot kapunk. Jelölje X_i a pénzünket i golyó húzása után ($X_0 = 0$). Legyen

$$Y_i = \frac{X_i}{2n-i} \quad (1 \le i \le 2n-1), \qquad \text{illetve} \qquad Z_i = \frac{X_i^2 - (2n-i)}{(2n-i)(2n-i-1)} \quad (1 \le i \le 2n-2).$$

(a) Mutassuk meg, hogy Y_i és Z_i martingál.

(b) Határozzuk meg X_i szórásnégyzetét.

3. HF: (beadási határidő: október 2.)

HF 3.1 ••• *A fogadó tönkremenetele.* Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ faevv., $\mathbf{P}\{X_i = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_i = -1\} = q$, ahol $0 < p = 1-q < 1$, és $p \neq q$. Legyenek továbbá $0 < a < b$ egészek, és

$$S_n := a + X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad T := \inf\{n : S_n = 0 \text{ vagy } S_n = b\}.$$

(a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}T < \infty$. *Tipp: volt erre egy egyszerű lemmánk.*

(b) Bizonyítsuk be, hogy

$$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \qquad \text{és} \qquad N_n := S_n - n(p-q)$$

mindketten martingálok (a természetes filtrációra nézve).

(c) Határozzuk meg a $\mathbf{P}\{S_T = 0\}$ tönkremenési valószínűséget, és a játék $\mathbf{E}T$ várható időtartamát.

HF 3.2 *Doob opcionális megállási tétel kiterjesztése.* Legyen $\tau \ge 0$ megállási idő, $\mathbf{E}\tau < \infty$. Vegyük észre, hogy $\{\tau \ge k\} = \bigcap_{i=0}^{k-1}\{\tau \neq i\} \in \mathcal{F}_{k-1}$.

(a) •• Az

$$|X_{\tau\wedge n} - X_0| = \Big|\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}) \cdot \mathbf{1}\{\tau \ge k\}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty}|X_k - X_{k-1}| \cdot \mathbf{1}\{\tau \ge k\}$$

egyszerű észrevétel és Doob opcionális megállási tétele (iii) pontjának bizonyítása alapján mutassuk meg, hogy ha X szupermartingál, melyre van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{E}(|X_k - X_{k-1}| \,\big|\, \mathcal{F}_{k-1}) \le C \qquad \forall k > 0, \text{ m.b.},$$

akkor $\mathbf{E}X_\tau \le \mathbf{E}X_0$. Martingál esetén természetesen egyenlőség van.

(b) •• Hasonlóan, ha $M_0 = 0$, lássuk be, hogy

$$(1)\quad M_{\tau\wedge n}^2 = \sum_{k=1}^{n}\big(M_k - M_{k-1}\big)^2 \cdot \mathbf{1}\{\tau \ge k\} + 2\sum_{1\le i<j\le n}(M_i - M_{i-1}) \cdot (M_j - M_{j-1}) \cdot \mathbf{1}\{\tau \ge j\},$$

$$(2)\quad M_{\tau}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\big(M_k - M_{k-1}\big)^2 \cdot \mathbf{1}\{\tau \ge k\} + 2\sum_{1\le i<j<\infty}(M_i - M_{i-1}) \cdot (M_j - M_{j-1}) \cdot \mathbf{1}\{\tau \ge j\},$$

(a szummák m.b. véges sok tagból állnak). Legyen M martingál, melyre $M_0 = 0$, és van $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\big|M_k - M_{k-1}\big| \le C \qquad \forall k > 0, \text{ biztosan}.$$

(*Nyilván ezt lehetne gyengíteni, de most elégedjünk meg ennyivel.*) Feltesszük továbbá, hogy $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$. Ekkor lássuk be, hogy (1) jobb oldalának első szummája monotonon konvergál (2) jobb oldalának első szummájához melynek várható értéke véges, a második szummák várható értéke pedig nulla mindkét esetben. *Tipp: Fubini tétel.* Vonjuk le a következtetést: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}M^2_{\tau\wedge n} = \mathbf{E}M^2_\tau$.

HF 3.3 *Wald azonosságok.* Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ faevv.-k $\mathcal{L}^1$-ben, $\mu := \mathbf{E}Y_i$, és $\tau \geq 1$ megállási idő (a természetes σ-algebra szerint), $\mathbf{E}\tau < \infty$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Mutassuk meg, hogy

(a) • ekkor $\mathbf{E}S_\tau = \mu \cdot \mathbf{E}\tau$.

(b) •• Ha Y_i korlátos és $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$ is teljesül (*nyilván ezeket lehetne gyengíteni, de most elégedjünk meg ennyivel*), $\sigma^2 := \mathbf{D}^2 Y_i$, akkor $\mathbf{E}(S_\tau - \mu\tau)^2 = \sigma^2 \cdot \mathbf{E}\tau$. (*Ezt általában a $\mu = 0$ esetben szokás használni.*)

Tipp: Használjunk martingált, és az előző feladat két részét.

4. HF: (beadási határidő: október 3.)

HF 4.1 *Repül az egyenletes, ki tudja hol áll meg...* Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ faevv., Egyenletes$(0, 1)$ eloszlással. Legyen $S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i$, és $\tau := \min\{n : S_n > 1\}$.

(a) • Mutassuk meg, hogy rögzített $0 \leq z \leq 1$-re $\mathbf{P}\{S_n < z\} = z^n/n!$. *Figyelem, ez nem igaz $z > 1$ esetén!*

(b) • Határozzuk meg $\mathbf{E}\tau$-t. *Tipp: τ nemnegatív, úgyhogy lehet farokvalószínűségeket összegezni. A farokvalószínűségek viszont szoros összefüggésben vannak az (a) feladattal.*

(c) • Mivel τ megállási idő, a Wald azonosság alapján számoljuk ki $\mathbf{E}(S_\tau - 1)$-et, azaz, hogy várhatóan hol van a faevv. egyenletes időközű felújítási folyamatban az 1 után következő első felújítási időpont.

HF 4.2 ••• *A log-optimális portfólió, avagy Bellman optimalitási elv.* Az n-edik fogadás során egységnyi fogadási összeg nyereménye ξ_n, ahol $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}\{\xi_n = +1\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = q$, $q + p = 1$, $p > 1/2$. Magyarul: $q < 1/2$ valószínűséggel elveszítjük a befizetett összeget és $p = 1 - q > 1/2$ valószínűséggel a dupláját nyerjük vissza. Az n-edik fogadás során C_n összegre fogadunk. Y_0 a kezdeti vagyonunk és Y_n-el jelöljük az n-edik fogadás eredményhirdetése utáni teljes vagyonunkat. Nyilván: $0 \leq C_n \leq Y_{n-1}$, $n > 0$. Célunk: rögzített N számú fogadás során maximalizálni az $\mathbf{E}\log(Y_N/Y_0)$ *várható nyereség rátánkat.* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a folyamat természetes filtrációja.

(a) Bizonyítandó, hogy tetszőleges *jósolható* C_n fogadási stratégia mellett $Z_n := \log Y_n - n\alpha$ szupermartingál, ahol $\alpha = p\log p + q\log q + \log 2$. Ebből következik, hogy $\mathbf{E}\log(Y_N/Y_0) \leq N\alpha$.

(b) Ám létezik olyan fogadási stratégia, amely mellett a fenti Z_n martingál. Tehát a várható nyereség ráta fenti optimális felső korlátja megfelelő stratégia választással elérhető.

HF 4.3 •••• *Azuma-Höffding egyenlőtlenség.*

(a) Legyen $c > 0$, és $-c \leq Y \leq c$ nulla várható értékű valószínűségi változó. Ekkor minden $\theta \in \mathbb{R}$-re

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\theta Y} \leq \cosh(\theta c) \leq \mathrm{e}^{\theta^2 c^2/2}.$$

Tipp: minden konvex f függvényre – például az $\mathrm{e}^{\theta\cdot}$ függvényre is – igaz, hogy

$$f(y) \leq \frac{c-y}{2c} \cdot f(-c) + \frac{c+y}{2c} \cdot f(c).$$

ha $-c \leq y \leq c$.

(b) Legyen M egy martingál, melyre $M_0 = 0$, és valamely $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $|M_n - M_{n-1}| \leq c_n$, $\forall n$. Ekkor minden $x > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\leq n} M_k \geq x\Big\} \leq \mathrm{e}^{-x^2/(2\sum_{k=1}^{n} c_k^2)}.$$

Tipp: kövessük az iterált logaritmus tétel bizonyítása ① részének gondolatmenetét.

5. HF: (beadási határidő: október 10.)

HF 5.1 •• *A Black-Scholes lemma második fele.* Legyen $N > 0$ egész, és

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N : \omega_i = \pm 1\},$$

$\mathcal{F}$ a természetes σ-algebra, $\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{\omega_i\}_{i=1}^n\big)$, és $\mathbf{P}$ a szorzatmérték, mely szerint ω_i-k fae., $\mathbf{P}\{\omega_i = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{\omega_i = -1\}$. Legyen továbbá M egy martingál az $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrációra nézve. Órán láttuk, hogy van olyan jósolható H folyamat, hogy

$$M = M_0 + H \bullet Z, \qquad \text{azaz} \qquad M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k \cdot (Z_k - Z_{k-1}) \qquad (0 \le n \le N),$$

ahol

$$Z_k = \sum_{i=1}^{k} (\omega_k - 2p + 1).$$

A feladat belátni H egyértelműségét.

HF 5.2 ••• *Szóegyezés.* Egy s elemű ABC-ből függetlenül, egyenletes eloszlással írunk n betűt egymás mögé. Legyen B egy adott, $k \le n$ hosszúságú szó, és X az a szám, ahányszor B előfordul az n hosszú betűsorozatunkban. (Átfedés is lehetséges, pl. a $B =$ AJJAJ $k = 5$ hosszú szó kétszer fordul elő az $n = 11$ hosszú, BAJJAJJAJDF sorozatban.). Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|X - (n-k+1)\big(\frac{1}{s}\big)^k\Big| \ge \varepsilon\Big\} \le 2\mathrm{e}^{-\varepsilon^2/2nk^2}.$$

HF 5.3 *Golyók és urnák finomítva.* m golyót egymástól függetlenül, egyenletesen elhelyezünk n urnába. Legyen $\mathcal{F}_i$ az első i golyó helye által generált σ-algebra, és $M_i = \mathbf{E}(F \,|\, \mathcal{F}_i)$, ahol F az üres urnák száma az utolsó golyó elhelyezése után. Legyen Y_i az üres urnák száma az i. lépés után ($i = 0, \ldots, m$). Mutassuk meg, hogy

(a) • $M_i = Y_i \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-i}$;

(b) •• $|M_i - M_{i-1}| \le \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-i}$;

(c) ••

$$\mathbf{P}\{|F - \mu| \ge \varepsilon\} \le 2\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2(n-1/2)}{n^2-\mu^2}},$$

ahol $\mu = \mathbf{E}F = n\big(\frac{n-1}{n}\big)^m$.

6. HF: (beadási határidő: október 24.)

HF 6.1 •• Legyen $\Omega = \mathbb{Z}$, és T az eltolás: $Tn = n + 1$ ha $n \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}$-n nincs eltolás-invariáns valószínűségi mérték.

HF 6.2 *Ergodicitás játékmodell.* Legyen $N > 0$ egész, $\mathcal{X} = \{0, 1\}^N$, és $\varrho \in [0, 1]$. A *Bernoulli(ϱ) szorzatmérték* $\mathcal{X}$-en az a $\mathbf{P}^{(\varrho)}$ eloszlás, mely szerint

$$\mathbf{P}^{(\varrho)}\{\underline{x}\} = \varrho^{\sum_{i=1}^{N} x_i} \cdot (1-\varrho)^{\sum_{i=1}^{N}(1-x_i)}, \qquad \underline{x} \in \mathcal{X}.$$

Nagyon formálisan, de csak annyi van ideírva, hogy N urna mindegyikében egymástól függetlenül ϱ valószínűséggel van egy golyó, $1 - \varrho$ valószínűséggel nincs golyó.

Definiáljuk a következő, $\mathcal{X}$-ben haladó folyamatot: minden lépésben egyenletesen és mindentől függetlenül választunk egy permutációt az $\{1, 2, \ldots, N\}$ számok $N!$ permutációja közül, és az aktuális állapotot ezzel megpermutáljuk, azaz az n. lépésben

$$\underline{X}(n) \mapsto \underline{X}(n+1); \qquad X_i(n+1) = X_{\pi_i(n)}(n), \qquad i = 1\ 2, \ldots, N;\ n \in \mathbb{Z},$$

ahol a $\underline{\pi}(n)$ permutációk különböző n-ekre függetlenek. Azaz: az urnákat golyóstul megpermutáljuk minden lépésben függetlenül, így kapjuk a következő 0-1 sorozatot az előzőből.

(a) •• Mutassuk meg, hogy minden $0 \le \varrho \le 1$ esetén a Bernoulli(ϱ) eloszlás stacionárius eloszlása az $\underline{X}(n)$ folyamatnak.

(b) •• Ergodikus-e a Bernoulli(ϱ) eloszlás ezzel a dinamikával? (Pontosabban a Bernoulli(ϱ) kezdeti eloszlás és a dinamika által indukált eloszlás a trajektóriák terén ergodikus-e?) Ha igen, miért, ha nem, mik az extremális valószínűségi mértékek, ők miért extremálisak, és hogyan keverhető ki belőlük a Bernoulli(ϱ) eloszlás? *Indokoljunk!*

(c) •• Legyen f annak indikátora, hogy (a nulla időben) van az első urnában golyó, azaz

$$f : \Omega \to \{0, 1\} \quad ; \quad f(\{\underline{X}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}) = X_1(0).$$

Határozzuk meg f ergodikus átlagát, azaz a

$$g = g(\{\underline{X}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_1(i) \qquad \text{m.b.}$$

valószínűségi változót, mint a trajektóriák (azaz elemi események) függvényét. Mik az invariáns halmazok, és igaz-e, hogy g ezekre mérhető? *Indokoljunk!*

(d) • Határozzuk meg g eloszlását, ha a rendszer Bernoulli(ρ) eloszlásban fejlődik.

(e) • Mi köze van a fenti válaszoknak a folyamat irreducibilis komponenseihez? *Megjegyzés: e játékmodellben ez triviális, de az élet persze nem mindig ilyen egyszerű.*

7. HF: (beadási határidő: október 31.)

HF 7.1 ••••• Az $\mathcal{X} = \{-1, 2\}$ kételemű állapottéren tekintsük azt a Markov láncot, melynek átmenetmátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Az órán tanultak mentén bizonyítsunk CHT-t magára az X_n Markov láncra az ő stacionárius eloszlásában, adjuk meg a CHT-ban szereplő szórást is. (*Később lesz erre egy jobb módszerünk is, de most csináljuk izomból: keressük meg a mátrix bal oldali sajátvektorait, az ezekre való felbontás segítségével a* $\mathbf{P}\{X_n = i \,|\, X_0 = j\}$ *valószínűségek expliciten számolhatók (i, j = −1 vagy 2). Ezért a feltételes várható értékek is expliciten számolhatók, és erre volt szükség az órán látott sémához (*X_n *felbontása egy stacionárius* Z_n *folyamat növekményére és egy martingálnövekményre). Ezután jöhet a martingál CHT.*)

HF 7.2 ••••• Az előbbi feladatban bizonyítsunk nagy számok törvényét és centrális határeloszlástételt arra, hogy (stacionárius eloszlásból indulva) n-ig hányszor történik meg a $-1 \to 2$ ugrás. (*Tipp:* $I_i := \mathbf{1}\{X_{i-1} = -1,\, X_i = 2\} - \mathbf{P}\{X_{i-1} = -1,\, X_i = 2\}$*, és nagyon figyeljünk arra, hogy ez* X_{i-1}*-től is függ, nem csak* X_i*-től. Használjuk az előző feladat részeredményeit.*)

8. HF: (beadási határidő: november 7.)

HF 8.1 (a) • $\mathbb{R}^d$-n a p-norma:

$$||\mathbf{x}||_p = \Big(\sum_{i=1}^{d} \mathbf{x}_i^p\Big)^{1/p} \qquad\qquad (1 \le p < \infty)$$

segítségével definiált operátornorma:

$$||\mathbf{A}|| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||_p}{||\mathbf{x}||_p}$$

a valós $d \times d$ mátrixokon a norma tulajdonságokon kívül szubmultiplikatív is:

$$||\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|| \le ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}||.$$

Mutassuk ezt meg a definíció alapján. (*Tipp: Bővítsük a bal oldalt a* sup *alatt* $||\mathbf{B}\mathbf{x}||$*-szel.*)

(b) ••• Legyenek most $\mathbf{A}_n$ fae. véletlen $d \times d$ mátrixok, melyekről felteszünk annyi regularitást, amennyi csak szükséges. (Mennyit is...?) Mutassuk meg, hogy a

$$\lambda := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln || \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_i ||$$

aszimptotikus növekedési ráta m.b. létezik.

(c) • Sőt, λ m.b. konstans is. Részletesen indokoljunk. (*Tipp: szubmultiplikativitás és szubadditív ergodtétel.*)

HF 8.2 Legyen $\mathcal{X} = [0, 1]$ az $1/2\pi$ sugarú körvonal, melynek 0 és 1 pontjait azonosítjuk egymással. Legyenek V_i, $i = 1, 2, \ldots$ független, Exp(λ) eloszlású valószínűségi változók, és legyen $X_{n+1} = X_n + V_n$ mod 1, $n \ge 0$.

(a) • Mutassuk meg, hogy $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy Markov lánc az $(\mathcal{X},\, \mathcal{B})$ állapottéren, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra.

(b) •• Határozzuk meg a $\pi(x,\, A)$ átmenetmagot, ha $x \in \mathcal{X}$ és $A \in \mathcal{B}$. Pontosabban: legyen $0 < a < 1$, és határozzuk meg az $\int_0^a \pi(x,\, \mathrm{d}y) = \pi\big(x,\, [0,\, a)\big)$ valószínűséget.

(c) • Keressük meg a Markov lánc (egy) μ stacionárius eloszlását.

(d) • Ergodikus-e a Markov lánc az előbb talált stacionárius eloszlásban?

9. HF: (beadási határidő: november 13.)

HF 9.1 Legyen $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbf{P})$ egy Markov lánc egy megszámlálható $\mathcal{X}$ halmazon, melynek átmenetvalószínűsége π és stacionárius eloszlása μ.

(a) •• Mutassuk meg, hogy az időmegfordítás, azaz az a leképzés, ami $\{X_n\}$-t $\{X_{-n}\}$-be viszi, a Markov láncot átviszi egy $(\Omega,\, \widehat{\mathcal{F}},\, \widehat{\mathbf{P}})$ láncba, melynek szintén μ a stacionárius eloszlása, $\widehat{\pi}$ átmenetvalószínűségei viszont nem feltétlenül egyeznek meg az eredeti π-vel. Határozzuk meg $\widehat{\pi}$-ot μ és π segítségével.

(b) •• Mutassuk meg, hogy a feltételes várható érték leképzés: $\Pi\, :\, f(\cdot) \mapsto \sum_y f(y)\pi(\cdot,\, y)$ egy kontrakció $\mathcal{L}^p(\mu)$-n, minden $p \in [1,\, \infty]$-re.

(c) •• Azt mondjuk, hogy a Markov lánc *reverzibilis*, ha az (a) részben szereplő megfordított $\widehat{\mathbf{P}}$ megegyezik az eredeti $\mathbf{P}$-vel. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor történik meg, ha Π önadjungált $\mathcal{L}^2(\mu)$-n.

HF 9.2 Legyen X_n egy irreducibilis Markov lánc, mely a nemnegatív egész számokon lépked, és átmenetvalószínűségei nullák, ha nem szomszédos egészek között vannak: $\pi(i,\, j) = 0$, ha $|i - j| \neq 1$.

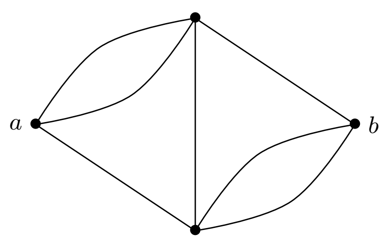
(a) • Mutassuk meg, hogy amennyiben van stacionárius eloszlás (azaz a lánc pozitív rekurrens), akkor a lánc reverzibilis.

(b) •• Ennek segítségével határozzuk meg a stacionárius eloszlást, mint az átmenetvalószínűségek függvényét.

(c) • Adjunk feltételt az átmenetvalószínűségekre, melyek garantálják, hogy a lánc pozitív rekurrens, illetve nem pozitív rekurrens.

10. HF: (beadási határidő: november 21.)

HF 10.1 Legyen X_n egy egyszerű bolyongás az alábbi gráfon:



(a) • Határozzuk meg a Markov láncnak megfelelő ellenálláshálózatot.

(b) •• Az ellenálláshálózat segítségével minden x csúcsra határozzuk meg a $\mathbf{P}_x\{\tau_a < \tau_b\}$ valószínűségeket.

(c) • Az ellenálláshálózat segítségével minden x csúcsra határozzuk meg, hogy várhatóan hányszor jár ott a lánc, mielőtt b-ben elnyelődik, ha a-ból indul.

HF 10.2 A 9.2. feladatban

(a) • Írjuk fel a láncnak megfelelő ellenálláshálózatot, mint az átmenetvalószínűségek függvényét.

(b) • Adjunk feltételt az átmenetvalószínűségekre, melyek garantálják, hogy a lánc rekurrens, illetve tranziens.

HF 10.3 A 9.2. feladatban legyen

$$\pi(i,\, j) := \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 0,\ j = 1; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha}{i}, & \text{ha } i > 0,\ j = i + 1; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha}{i}, & \text{ha } i > 0,\ j = i - 1; \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \qquad \Big(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}\Big).$$

(a) •• Mutassuk meg, hogy a lánc pozitív rekurrens, ha $\alpha < -1/4$, és nem pozitív rekurrens, ha $\alpha > -1/4$.

(b) •• Mutassuk meg, hogy a lánc rekurrens, ha $\alpha < 1/4$, és tranziens, ha $\alpha > 1/4$.

11. HF: (beadási határidő: november 28.) Kicst visszanézünk korábbra, a CHT-re:

HF 11.1 ••• 7.1-es feladat újra, ezúttal az órán látott markovi módszerrel.

HF 11.2 Tekintsük a következő bolyongást a nemnegatív egészeken:

$$\pi(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{ha } x = y \geq 0. \\ \dfrac{1-\delta}{4} & \text{ha } y = x+1,\ x \geq 1, \\ \dfrac{1+\delta}{4} & \text{ha } y = x-1,\ x \geq 1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{ha } x = 0,\ y = 1. \end{cases}$$

(a) •• Mutassuk meg, hogy a lánc pozitív rekurrens, és határozzuk meg a μ stacionárius eloszlást.

(b) • Legyen f egy kompakt tartójú függvény a nemnegatív egészeken, és U egy megoldása az $[I - \Pi]U = f$ egyenletnek. π alakját felhasználva mutassuk meg, hogy ez az egyenlet egy lineáris másodrendű rekurzió. (Ezért aztán minden f-re van megoldása.)

(c) • Íme egy **hibás (!!)** érvelés: szorozzuk meg a fenti egyenletet a stacionárius μ eloszlással, majd összegezzünk:

$$\sum_{x,y=0}^{\infty} \mu(y)(\delta_{yx} - \pi(y,\, x))U_x = \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y) f(y)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)U_x - \sum_{x=0}^{\infty}\Big(\sum_{y=0}^{\infty} \mu(y)\pi(y,\, x)\Big)U_x = \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y) f(y)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)U_x - \sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)U_x = \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y) f(y)$$

$$0 = \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y) f(y),$$

ami persze nem stimmelhet, hiszen f tetszőleges kompakt tartójú függvény. Hol a hiba az érvelésben?

(d) •• Tegyük rendbe a dolgokat. Mivel f kompakt tartójú, vegyünk egy olyan a-t, hogy $f(z) = 0$ ha $z \geq a$. A fenti egyenletet összegezzük a-ig csak, a jobb oldalon nem számít, hogy a-ig megyünk vagy ∞-ig. A bal oldalon írjuk fel az összegzést $a-1$-ig, és válasszuk külön az a-dik tagot. Kihasználva, hogy $\pi(y,\, x) = 0$ ha $|x - y| > 1$, és azt, hogy μ stacionárius, a bal oldal jelentősen egyszerűsödik. π és μ konrét alakját beírva (és a határok környékén nagyon figyelve) végül mutassuk meg, hogy U exponenciálisan növekszik nagy a-kra, vagy konstanshoz tart, és ez utóbbi pontosan akkor történik, ha $\sum_x f(x)\mu(x) = 0$.

(e) • Tudunk-e CHT-t bizonyítani a $\sum_{j=0}^{n} f(X_j)$ mennyiségre, ha $\sum_x f(x)\mu(x) = 0$?

12. HF: (beadási határidő: december 4.)

HF 12.1 •• *Rényi forgalommodell.* Kezdetben az autók egy mindkét irányban végtelen autópályán vannak elhelyezve, homogén, α intenzitású N_0 Poisson folyamat szerint. Az autók eme véletlen kezdő helyzeteit X_n-ek jelölik. Mindegyik autó kap egy mindentől független, véletlen $-\infty < V_n < \infty$ kezdősebességet, és ezzel a sebességgel egyenletesen halad az autópályán (negatív sebesség azt jelenti, hogy balra megy az autó). Feltesszük, hogy $\mathbf{E}|V_1| < \infty$, és az autók sosem ütköznek, a modellben inkább áthaladnak egymáson.

(a) Mi az autók N_t helyzetének eloszlása t-kor?

(b) Legyen T_n az az (esetleg negatív) időpillanat, amikor az n. autó áthalad az origón. Határozzuk meg a $\sum_n \epsilon_{T_n}$ pontfolyamat eloszlását.

HF 12.2 •• *$M/G/\infty$ sor.* Hívások homogén, α intenzitású Poisson folyamat szerint kezdődnek $(0,\, \infty)$-ben. Minden hívás hossza mindentől független, G eloszlású. Legyen $N(t)$ a t-kor folyamatban levő hívások száma. Határozzuk meg $N(t)$ eloszlását egy adott t esetén.

HF 12.3 •• Tekintsük az $N = \sum_n \epsilon_{X_n}$ Poisson folyamatot $(0, \infty]$-en, melynek intenzitás-mértéke $\mu(\,\mathrm{d}x) = \alpha x^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}x$, ha $x > 0$; itt $\alpha > 0$ paraméter. Legyen $Y_1 = \sup_n X_n$ a legnagyobb pont, és Y_2 a második legnagyobb pont (ezek m.b. léteznek, miért is?). Határozzuk meg Y_1 és Y_2 együttes eloszlását.

HF 12.4 • *Harry és a jégeső;* ez is Resnick 1992. Harry éttermének laposteteje van, mely jégesőben fokozott veszélynek van kitéve. Amikor jégeső esik a tetőre, kárt okoz a közvetlen becsapódás, de ezután visszapattan a jégszem, és másodszor is becsapódva ismét megüti a tetőt. Harry és a biztosítási szakember is egyetértenek, hogy az elsődleges becsapódások síkbeli Poisson folyamat szerint hagytak nyomot a tetőn. Azonban Harry úgy gondolja, hogy az összes becsapódásnyom, tehát az elsődleges és a másodlagos becsapódások nyomai együttesen is Poisson folyamatot alkotnak. A biztosítási szakember ezzel nem ért egyet. Melyiküknek van igaza?

HF 12.5 ••• Egy önkiszolgáló üzlethez homogén α intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek az ügyfelek. A j. ügyfél V_j ideig vásárol, azután F_j ideig fizet (sor nincs). A $\{V_j,\, F_j\}_j$ valószínűségi változó párosok különböző j-kre függetlenek, és a Poisson folyamattól is függetlenek, egyazon j-re viszont V_j és F_j egymástól általában nem függetlenek. Legyenek $X(t)$ illetve $Y(t)$ a vásárlással illetve fizetéssel foglalkozó vásárlók száma t-kor. Határozzuk meg $X(t)$ és $Y(t)$ együttes eloszlását V_j és F_j együttes eloszlásának függvényében.