

Félévi időbeosztás (nagyjából) házi feladat beadási határidőkkel (pontosan)
Valószínűségszámítás 2., 2012 tavasz

Dátum	Téma	Beadandó
Feb 8. Sze	Alapfogalmak és eszközök	
Feb 15. Sze	Konvolúció (normális, Cauchy, exponenciális)	
Feb 22. Sze	Konvolúció (normális, Cauchy, exponenciális)	1. HF
Feb 29. Sze	Gen. fv-ek: momentumok, eloszlások rekonstrukciója	2. HF
Már 7. Sze	Gen. fv-ek, elágazó folyamatok, bolyongások	3. HF: Már 9.
Már 14. Sze	Gen. fv-ek, elágazó folyamatok, bolyongások	4. HF: Már 19.
Már 21. Sze	Gyenge és erős konvergencia, Borel-Cantelli lemmák	5. HF: Már 23.
Már 28. Sze	<i>Kari szünet</i>	-
Ápr 4. Sze	Nagy számok erős törvénye	6. HF: Ápr 6.
Ápr 11. Sze	Nagy számok erős törvénye	7. HF: Ápr 13.
Ápr 18. Sze	Karakterisztikus függvény, tulajdonságai, példák	8. HF: Ápr 20.
Ápr 25. Sze	Gyenge konvergencia, feszesség, Centrális határeloszlástétel	9. HF: Ápr 27.
Máj 2. Sze	CHT, példák, Berry-Esséen tétel	10. HF: Máj 4.
Máj 9. Sze	Lindeberg CHT, korlátlanul osztható és stabilis eloszlások (<i>Ha marad idő: Kolmogorov 0-1 tv., Iterált log.tétel, nagy eltérés tételek</i>)	11. HF: Máj 11.

Házi feladatok

Valószínűségszámítás 2., 2012 tavasz

A házi feladatok jelen file-ban kerülnek kitűzésre, és a kitűzést követő előadás kezdetekor beadandók. Minden feladat számít, és annyi pontot ér, ahány • van mellette. Minimum elérendő: 40%, azaz 48 pont a félév során.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az igazi csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF: (Beadandó: február 22.)

1.1 •• Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}\{X_i = 0\} = \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \frac{1}{2}$. Legyen $Y := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$. Bizonyítsuk be, hogy az Y egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.

1.2 Legyenek $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ valószínűségi mértékek ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren. Legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazalgebra, amire $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ kölcsönösen szinguláris, ha van olyan $H \in \mathcal{F}$, hogy $\mathbf{P}_1(H) = 1$ és $\mathbf{P}_2(H) = 0$.

a) • Lássuk be, hogy a két mérték akkor és csak akkor kölcsönösen szinguláris, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathcal{A} : \quad \mathbf{P}_1(A) \geq 1 - \varepsilon, \quad \mathbf{P}_2(A) \leq \varepsilon.$$

b) •• Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}\{X_i = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{X_i = 1\} = p \neq \frac{1}{2}$. Legyen $Y := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$. Bizonyítsuk be, hogy az Y valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos, de nem abszolút folytonos, hanem szinguláris (azaz szinguláris a Lebesgue mértékre nézve, azaz az egyenletes eloszlásra nézve; lásd előző feladat).

1.3 a) • Mutassuk meg indukcióval, hogy $n > r > 0$ egészekre

$$\sum_{k=r}^{n-1} \binom{k-1}{r-1} = \binom{n-1}{r}.$$

b) • Bizonyítsuk be **analitikusan**, hogy n darab független, azonos $\text{Geom}(p)$ eloszlású valószínűségi változó összege negatív binomiális eloszlású.

1.4 •• Legyen X és Y független $\text{Exp}(\lambda)$, illetve $\text{Exp}(\mu)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Z := X + Y$ sűrűségfüggvényét. Mi történik a $\lambda \rightarrow \mu$ határátmenetben?

1.5 • Legyen X egyenletes a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon. Bizonyítsuk be, hogy ha n nem prím, akkor X eloszlása előáll, mint két egészértékű eloszlás konvolúciója.

2. HF: (Beadandó: február 29.)

- 2.1 ••** Mórícka matematikushallgató a BME-n, Valószínűségszámítás 1. gyakorlatból próbál átmenni. Ha nem sikerül neki az egyik félévben, akkor a következő félévben újra próbálkozik. Az egymást követő félévek próbálkozásainak kimenetele független, és minden félévben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel bukik meg. Ha az aláírást megszerezte, még ugyanabban a félévben próbálkozik az elméleti vizsgával. Ha ez nem sikerül, akkor a következő félévben újra próbálkozik az elméleti vizsgával, egészen addig, amíg át nem megy ezen is. Az egyes félévekben elméletből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel megy át. Határozzuk meg Mórícka Valószínűségszámítás 1.-el töltött félévei számának az eloszlását!
- 2.2 ••** Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös sűrűségfüggvénye $f(x) = 3x^2 \cdot \mathbf{1}\{x \in [0, 1]\}$. Határozzuk meg az $U := X + Y$ és a $V := X - Y$ valószínűségi változók (marginális) sűrűségfüggvényét.
- 2.3** Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x} , ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \dots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$.
- a) • Adjuk meg S_2 sűrűségfüggvényét.
- b) • Határozzuk meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \dots$ -ra $\mathbf{P}\{N(t) = k\}$ értékét! (Számolás nélkül is meggy, ha jól megértettük miről van szó.)
- 2.4 •••** Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos $E(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Jelölje $f_n(x)$ az $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}.$$

Számítógéppel ábrázoljuk az

$$\tilde{f}_n(x) := \sqrt{\frac{n}{12}} f_n\left(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}} x\right)$$

függvényt $n = 1, 2, \dots, 10$ -re. Mit látunk? Értelmezzük az eredményt.

3. HF: (Beadandó: március 9.)

- 3.1 •** Valószínűségeloszlások generátorfüggvényei-e az alábbi függvények?

$$(a) \quad \exp\left(\frac{z-1}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0; \quad (b) \quad \frac{(z+1)^6}{64};$$

$$(c) \quad \frac{2}{2-z}; \quad (d) \quad \frac{2}{1+z}.$$

- 3.2 ••** Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független (optimista, azaz a siker sorsszámát tekintjük) $\text{Geom}(p_1)$ eloszlású valószínűségi változók, és ν egy tőlük független, (szintén optimista) $\text{Geom}(p_2)$ eloszlású valószínűségi változó. Lássuk be generátorfüggvény-módszerrel, hogy

$$\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \text{Geom}(p_1 p_2).$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet is a kapott formulának.

- 3.3 ••** Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

- a) az időskálát fix és oszthatatlan egy másodperces időegységekre osztjuk,
- b) feltesszük, hogy $p \in (0, 1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,
- c) továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább három másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a következő három másodpercben lesz-e forgalom.) Határozzuk meg a gyalogos várakozási idejének generátorfüggvényét! *Segítség: alkalmazzuk a teljes várhatóérték tételét (avagy toronyszabályt) arra vonatkozóan, hogy az első kocsi mikor érkezik!*

- 3.4 ••** Egy majom egymás után függetlenül, egyenlő valószínűséggel üti le az (angol) írógép 26 betűjének egyikét (számot és írásjelet nem üt, ennyire van intelligens). Legyen ν az a szám, ahányadik leütésre először megjelenik az a szó, hogy "BAB". Határozzuk meg ν generátorfüggvényét és várható értékét.

- 3.5 • Mórícka rendszeresen gyorsraja, így a rendőr rendszeresen megállítja. Ilyenkor az esetek felében (mindentől függetlenül) 10 000 Ft a bírság, felében pedig 50 000 Ft. Ráadásul Mórícka ezeket a helyzeteket meglehetősen rosszul kezeli, és nagy szája következményeként minden rendőri intézkedés (függetlenül) p valószínűséggel azzal is jár, hogy bevonják a jogosítványát. Határozzuk meg a Mórícka által összesen kifizetett büntetés generátorfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.
- 3.6 •• Egy X valószínűségi változó eloszlása korlátlanul osztható, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ -re van olyan $Y_1^n, \dots, Y_n^n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változó n -es, hogy

$$\sum_{i=1}^n Y_i^n \sim X.$$

- a) Korlátlanul osztható-e Poisson eloszlás?
 b) Korlátlanul osztható-e a binomiális eloszlás?
 c) Lássuk be, hogy minden $0 < p < 1$ -hez megadható olyan $p_1, p_2, \dots$ valószínűségi eloszlás és $\lambda > 0$, hogy $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Geom}(p)$, ahol $X_1, X_2, \dots$ f.a.e. és $k \geq 1$ -re $\mathbf{P}\{X_i = k\} = p_k$, valamint ν tőlük független és $\text{Poi}(\lambda)$ eloszlású. Mutassuk meg ennek segítségével, hogy a geometriai eloszlás korlátlanul osztható.

4. HF: (Beadandó: március 19.)

- 4.1 •• Mórícka eladó egy üzletben, ahol minden egyes vevő kiszolgálása 3 percre tart. Ennyi idő alatt 0.6 valószínűséggel beáll két újabb vevő a sorba, 0.2 valószínűséggel egy új vevő áll be, és 0.2 valószínűséggel nem jön új vevő. Mórícka kávézhat egyet, ha kiürült a sor. Mi annak a valószínűsége, hogy az első vásárló megjelenése után ez valaha bekövetkezik? *Tipp: mi köze a feladatnak elágazó folyamatokhoz?* Részletesen indokoljunk.
- 4.2 •• Egy elágazó folyamatban $m = \mathbf{E}Z_{1,1}$ (várható utódszám) és $\sigma = \mathbf{D}Z_{1,1}$ (utódszám szórása) segítségével fejezzük ki az n . generáció egyedszámának $\mathbf{D}^2 Z_n$ szórásnégyzetét.
- 4.3 Egy elágazó folyamatban $N := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ jelöli a valaha élt összes egyed számát.
- a) • Írjunk fel egy rekurziót N generátorfüggvényére (*hány gyereke van az első egyednek?*).
 b) • Oldjuk meg a rekurziót ha az utódszám eloszlása Bernoulli(p).
 c) • Oldjuk meg a rekurziót ha az utódszám eloszlása Pesszimista Geom(p).
 d) • Határozzuk meg N várható értékét mindkét esetben.
- 4.4 Egy elágazó folyamatban az utódszám generátorfüggvénye $P(s) = q + ps^2$, ahol $0 < p = 1 - q < 1$. Legyen τ a kihalás ideje: $\tau = \inf\{n : Z_n = 0\}$.
- a) • Határozzuk meg a kihalás valószínűségét: $\mathbf{P}\{\tau < \infty\}$.
 b) • Írjuk fel a $\mathbf{P}\{\tau > n\}$ valószínűséget (*én nem találtam szép alakot erre*).

5. HF: (Beadandó: március 23. A 12-ből 2 pont bónusz, mert ezek a feladatok nem olyan könnyűek.)

- 5.1 •••• Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{P}\{\zeta_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i$ egyszerű, szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$ -n. Legyen $\tau = \min\{n : S_n = 1\}$ az első szint elérési ideje. Határozzuk meg $\mathbf{P}\{\tau = k\}$ értékét!

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{P}\{\tau = k\} = ?$$

Tipp: a generátorfüggvény hatványsorának együtthatóit fejezzük ki az általánosított binomiális együtthatók segítségével, határozzuk meg a $\mathbf{P}(\tau = 2k)$ értékeket, és használja a Stirling-formulát!

- 5.2 •••• Tekintsük $\mathbb{Z}$ helyett a (végtelen) $\mathbb{G}_g$, g -ed fokú homogén fát mint alapgráfot és rajta a szimmetrikus bolyongást. Azaz: S_n egy véletlen bolyongás $\mathbb{G}_g$ -n, amely egy megjelölt csúcsról (origóról) indul és időegységenként lép az aktuális hely g szomszédja közül egyet egyenletes g^{-1} valószínűséggel választva. Számoljuk ki a Φ, F, L generátorfüggvényeket, ahol $\Phi(z)$: egy kijelölt első szomszéd elérési idejének generátorfüggvénye, $F(z)$: origóba való első visszatérés idejének generátorfüggvénye; $L(z)$: origóba való utolsó látogatás idejének generátorfüggvénye.
- 5.3 •••• Legyenek $X_1, X_2, \dots$ nemnegatív egész független és azonos eloszlású valószínűségi változók Q generátorfüggvényel, és legyen

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - 1),$$

azaz egy bolyongó pozíciója n lépés után, aki az i . lépésben $X_i - 1$ -et lép (vagyis -1 -et, ha $X_i = 0$, 0 -t, ha $X_i = 1$, stb.). Legyen továbbá $\tau = \inf\{n > 0 : S_n = -1\}$ a -1 szint első elérési ideje, jelöljük ennek generátorfüggvényét P -vel.

- a) Az első lépésre feltételezve mutassuk meg, hogy $P(s) = Q(P(s)) \cdot s$.
b) Az a) rész alapján határozzuk meg P -t, ha

$$X_i = \begin{cases} 2, & p \text{ valószínűséggel,} \\ 0, & 1 - p \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

(Azaz S_n egy egyszerű bolyongás.)

- c) Legyenek most az X_i változók Pesszimista Geom(p) eloszlásúak, az a) rész alapján határozzuk meg P -t.
d) A c) rész alapján határozzuk meg annak valószínűségét p függvényében, hogy a bolyongó valaha eléri a -1 szintet.

6. HF: (Beadandó: április 6.)

6.1 Legyenek az $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots, X$ és Y valószínűségi változók egyazon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezve és tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$. Bizonyítandó, hogy

a) • $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$.

b) • Ha 1 valószínűséggel $Y_n \neq 0$ és $Y \neq 0$, akkor $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X/Y$.

6.2 •• Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left((x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right).$$

6.3 ••• Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{2}{3}.$$

6.4 Legyen $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ az n -dimenziós valós euklideszi tér egységgömb-felület. S^{n-1} -en egyértelműen meghatározott a $\nu^{(n-1)}$ valószínűségi mérték, mely invariáns az $\mathbb{R}^n$ tér ortogonális transzformációira. Azaz: bármely $A \subset S^{n-1}$ Borel-mérhető halmazra és az $\mathbb{R}^n$ tér bármely H ortogonális transzformációjára $\nu^{(n-1)}(HA) = \nu^{(n-1)}(A)$. (Ezt az egyértelműen meghatározott mértéket nevezzük az S^{n-1} gömbfelület Haar mértékének. Ez nem egyéb, mint az egyenletes eloszlás mérték S^{n-1} -en.)

a) • Legyen $\mathbf{X}$ egy olyan véletlen vektor $\mathbb{R}^n$ -ben, melynek $X_1, X_2, \dots, X_n$ komponensei független és azonos $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges H ortogonális transzformációját alkalmazva az $\mathbf{Y} := H\mathbf{X}$ véletlen vektor $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ komponensei szintén független és azonos $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók lesznek. Ebből és az egyenletes mérték unicitásából bizonyítsuk, hogy $\mathbf{X}/|\mathbf{X}| \in S^{n-1}$ eloszlása pontosan $\nu^{(n-1)}$. (Azaz: bármely Borel mérhető $A \subset S^{n-1}$ esetén $\mathbf{P}(\mathbf{X}/|\mathbf{X}| \in A) = \nu^{(n-1)}(A)$.)

b) • Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos $\mathcal{N}(0, 1)$ standard normális eloszlású valószínűségi változók és

$$R_n := (X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)^{1/2}.$$

Bizonyítandó, hogy $R_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$, amint $n \rightarrow \infty$.

c) • Válasszunk egy véletlen P pontot az S^{n-1} gömbfelületen egyenletes eloszlással (azaz a $\nu^{(n-1)}$ Haar mérték szerint) és jelöljük e pont $\mathbb{R}^n$ -beli koordinátáit $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)})$ -el. A fenti a) és b) pontok felhasználásával bizonyítsuk az alábbi határeloszlás tételket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sqrt{n}Y_1^{(n)} < y) = \Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sqrt{n}Y_1^{(n)} < y_1; \sqrt{n}Y_2^{(n)} < y_2) = \Phi(y_1)\Phi(y_2).$$

Tipp: $\mathbf{P}(\sqrt{n}Y_1^{(n)} < y) = \mathbf{P}(\sqrt{n}X_1/R_n < y)$, a feladat jelöléseivel.

7. HF: (Beadandó: április 13. Megint van benne egy kis bónusztartalom.)

- 7.1** ••• Fogalmazzunk meg szükséges és elégséges feltételt arra, hogy független $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ valószínűségi változók sorozata mikor tart eloszlásban, illetve majdnem biztosan nullához.
- 7.2** •• Végtelen sok független kísérletet végzünk: az n -edik kísérlet $n^{-\alpha}$ valószínűséggel sikeres, $0 < \alpha < 1$. Legyen továbbá $k \geq 1$. Akkor örülünk, ha végtelen sokszor fordul elő, hogy k közvetlenül egymást követő kísérletünk sikeres. Mekkora valószínűséggel örülünk?
- 7.3** (A leghosszabb tiszta fej sorozat, I.)
Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása: $\mathbf{P}\{X_k = 1\} = p, \mathbf{P}\{X_k = 0\} = q$, ahol $p + q = 1$. Rögzítsünk egy $\lambda > 1$ paramétert és jelöljük $A_k^{(\lambda)}$ -val a következő eseményeket: $k = 0, 1, 2, \dots$

$$A_k^{(\lambda)} := \left\{ \exists r \in [\lambda^k, [\lambda^{k+1}] - k] \cap \mathbb{N} : X_r = X_{r+1} = \dots = X_{r+k-1} = 1 \right\}.$$

Egyszerűen szólva: az $A_k^{(\lambda)}$ esemény azt jelenti, hogy $[\lambda^k]$ és $[\lambda^{k+1}] - 1$ között van valahol egy k hosszú tisztán 1-esekből álló tömör sorozat. Bizonyítandó, hogy

- a) • Ha $\lambda < p^{-1}$, akkor 1 valószínűséggel az $A_k^{(\lambda)}$ események közül csak véges sok következik be.
b) •• Ha $\lambda > p^{-1}$, akkor 1 valószínűséggel az $A_k^{(\lambda)}$ események közül végtelen sok bekövetkezik.
c) • Mi történik $\lambda = p^{-1}$ esetén?
- 7.4** ••• (A leghosszabb tiszta fej sorozat, II.)
Legyen

$$R_n := \sup\{k \geq 0 : X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+k-1} = 1\}.$$

Azaz: R_n az n -el kezdődő tiszta 1-es sorozat hossza. (Ha $X_n = 0$, akkor $R_n = 0$.) Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{\log n} = |\log p|^{-1} \right\} = 1.$$

Tipp: $\alpha > 0$ rögzített paraméterre legyen

$$B_n^{(\alpha)} := \{R_n > \alpha \log n / |\log p|\}.$$

Ha $\alpha > 1$, akkor a Borel-Cantelli lemma direkt állításából egyszerű számolás útján adódik, hogy 1 valószínűséggel csak véges sok $B_n^{(\alpha)}$ következik be. Ha $\alpha \leq 1$, akkor az előző feladat megfontolásából következik, hogy 1 valószínűséggel végtelen sok $B_n^{(\alpha)}$ bekövetkezik.

8. HF: (Beadandó: április 20.)

- 8.1** ••• Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}X^2 < \infty$ pontosan akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbf{P}\{|X| > n\} < \infty$.
- 8.2** •• Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók. Lássuk be, hogy pontosan akkor lesz $\sup_n X_n < \infty$ m.b., ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{X_n > A\} < \infty$ valamely pozitív véges A számmal.
- 8.3** ••• Bizonyítsuk, hogy tetszőleges $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változó sorozathoz létezik olyan determinisztikus $c_1, c_2, \dots$ számsorozat, hogy $\frac{X_n}{c_n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.
- 8.4** •• A *McMillan tétel legegyszerűbb alakja*.
Legyen $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$, ahol $p_i, i = 1, 2, \dots, r$ pozitív számok, melyekre $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$. Azaz: adott egy valószínűségi eloszlás az $\{1, 2, \dots, r\}$ halmazon. A $\mathbf{p}$ eloszlás *entrópiáját* a következőképpen definiáljuk: $H(\mathbf{p}) := -\sum_{j=1}^r p_j \log p_j$. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}\{X_n = j\} = p_j$. Azaz: független azonos kísérleteket végzünk, melyeknek lehetséges kimenetelei $\{1, 2, \dots, r\}$ indexekkel vannak jelölve és X_k a k -edik kísérlet eredményét jelöli. Defináljuk az $R_n := \prod_{k=1}^n p_{X_k}$ valószínűségi változókat. Az R_n azt mondja meg, hogy *mi az a priori valószínűsége a bekövetkezett $X_1, X_2, \dots, X_n$ sorozatnak*. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log R_n = -H(\mathbf{p}) \right\} = 1.$$

9. HF: (Beadandó: április 27.)

- 9.1** •• Határozzuk meg a Binomiális(n, p), a Poisson(λ), az optimista és pesszimista Geometriai(p), az Egyenletes(a, b), a Standard Normális majd ebből a Normális(μ, σ^2), az Exponenciális(λ), és a Standard Cauchy eloszlások karakterisztikus függvényeit. Tipp: Ha elakadtunk, segíthet a reziduumszámítás.

- 9.2 •• Legyen φ egy X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Vajon $\operatorname{Re}\varphi$ illetve $\operatorname{Im}\varphi$ valószínűségi eloszlások karakterisztikus függvényei-e?
- 9.3 •• Bizonyítsuk be, hogy két független és azonos eloszlású valószínűségi változó különbsége nem lehet E-gyenletes $(-1, 1)$ eloszlású. *Tipp: Írjuk fel mindkettő karakterisztikus függvényét és lássuk be, hogy ezek nem lehetnek azonosak.*
- 9.4 •• Legyen $f(x) = 1 - |x - 1|$, ha $0 \leq x \leq 2$ és $f(x) = 0$, egyébként. Határozzuk meg az f sűrűségfüggvényű eloszlás karakterisztikus függvényét.
- 9.5 •• Magyarázzuk a karakterisztikus függvények segítségével a

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t/2}{t/2} \cos t/2$$

és a

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^k}$$

azonosságokat.

10. HF: (Beadandó: május 4.)

- 10.1 •• Legyen X egy szabályos dobókocka által mutatott szám, Y pedig X -től független, $E(0, 1)$ eloszlású.
- Határozzuk meg X karakterisztikus függvényét.
 - Határozzuk meg Y karakterisztikus függvényét.
 - Határozzuk meg $X + Y$ karakterisztikus függvényét. Ebből olvassuk le mi $X + Y$ eloszlása.
 - Határozzuk meg $X - Y$ karakterisztikus függvényét. Ebből olvassuk le mi $X - Y$ eloszlása.
- 10.2 •• Mutassuk meg, hogy ha φ egy egész értékű eloszlás karakterisztikus függvénye, akkor a súlyfüggvény

$$p(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

alakban számolható.

- 10.3 ••• Emlékeztetőül: $X \sim \text{Cauchy}(b, a)$ ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$), ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + (x - b)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a standard eset az $a = 1$, $b = 0$. A standard Cauchy eloszlás karakterisztikus függvényét meghatároztuk: $\varphi_{\text{St.Cau}}(t) = e^{-|t|}$.

- Mutassuk meg, hogy a $\text{Cauchy}(b, a)$ eloszlás a standard Cauchy eloszlás lineáris transzformáltjaként kapható.
 - Az **a)** rész és $\varphi_{\text{St.Cau}}$ segítségével határozzuk meg a $\text{Cauchy}(b, a)$ eloszlás karakterisztikus függvényét.
 - A karakterisztikus függvények segítségével ellenőrizzük, hogy egy $\text{Cauchy}(b_1, a_1)$ és egy tőle független $\text{Cauchy}(b_2, a_2)$ valószínűségi változó összegének eloszlása $\text{Cauchy}(b_1 + b_2, a_1 + a_2)$.
 - Meg tudnánk-e ugyanezt csinálni momentumgeneráló függvényekkel? Miért?
 - Eloszlás karakterisztikus függvénye-e a $t \mapsto e^{-(|t|+1)^2} \cdot e$ függvény?
- 10.4 **a)** •• Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ független és azonos standard Cauchy eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az $Y_n := n^{-1}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.
- b)** • Mutassuk meg egy példával, hogy abból, hogy valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő a tagok karakterisztikus függvényeinek szorzatával, nem következik a tagok függetlensége.

11. HF: (Beadandó: május 11. A 11.4 kicsit nehezebb, extra pontot ér.)

- 11.1 •• Legyenek μ_n normális $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ valószínűségi mértékek, $n = 1, 2, \dots$. Bizonyítandó, hogy a μ_n eloszláscsalád pontosan akkor feszes, ha az m_n és a σ_n^2 számsorozatok korlátosak.

Alább használjunk folytonossági tételt, és a karakterisztikus függvények konvergenciáját.

- 11.2** •• Legyen $X_p \sim \text{Pesszimista Geom}(p)$. Lássuk be karakterisztikus függvény-módszerrel, hogy $p \cdot X_p$ határeloszlása $\text{Exp}(1)$, ahogy $p \searrow 0$.
- 11.3** ••• Mutassuk meg, hogy a Pesszimista Negatív Binomiális(r, p) eloszlás gyengén konvergál a $\text{Poi}(\lambda)$ eloszláshoz, ha $r \rightarrow \infty$ (a sokadik sikerre várunk) úgy, hogy $r \cdot (1 - p) \rightarrow \lambda$ (a siker valószínűsége így tart 1-hez).
- 11.4** •••• Legyenek az $Y_1, Y_2, \dots$ független és azonos $E(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen $X_k = k \cdot Y_k$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gy}} 1, \quad \text{és} \quad \frac{S_n - \frac{n^2}{4}}{\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gy}} \mathcal{N}(0, 1).$$