Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]

Valószínűségszámítás 1. matematikusoknak és fizikusoknak, 2009 ősz

(zárójelben: tervezett tanóraszám; egy tanóra = 45 perc)

-vel kezdődő hét	**Előadás** H 12-14, Km63	**Matgyak.1** H 14-16, H46	**Matgyak.2** K 8-10, H61	**Fizgyak.1&2** Cs 12-14, T605&Z105
Szept. 7	Eseménytér, mértékelmélet (1.3), egyszerű állítások (0.7)	Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7)	Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7)	Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7)
Szept. 14	Feltételes val. (0.5), Bayes tétel (1), (feltételes) függetlenség (0.5)	Egyenlő val.ségű események (2) **[1. HF]**	**## Egyetemi napok ##**	Egyenlő val.ségű események (2) **[1. HF]**
Szept. 21	(Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók (0.3), várható é., szórás (0.7)	Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.3), (feltételes) függetlenség (0.9) **[2. HF]**	Egyenlő val.ségű események (2) **[1. HF]**	Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.3), (feltételes) függetlenség (0.9) **[2. HF]**
Szept. 28	Bernoulli, binomiális eo. (1.3), Bernoulli NSZTV (0.7)	(Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók (1) **[3. HF]**	**## Kari sportnap...? ##** Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.3), (feltételes) függetlenség (0.9)	(Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók (1) **[3. HF]**
Okt. 5	Bernoulli NSZTV (0.5), Poisson eloszlás & folyamat (1.5)	Várható é., szórás (1.3), Bernoulli, binomiális eo. (0.7) **[4. HF]**	(Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók (1) **[2., 3. HF]**	Várható é., szórás (1.3), Bernoulli, binomiális eo. (0.7) **[4. HF]**
Okt. 12	Geometriai, neg.binom, hipergeom. eo. (0.5), eloszlásfv., sűr.fv. (0.5), várható é., szórás (0.5), eo.-sok egyéb jell. (0.5)	Bernoulli, binomiális eo. (0.6), Poisson eloszlás & folyamat (1.4) **[5. HF]**	Várható é., szórás (1.3), Bernoulli, binomiális eo. (0.7) **[4. HF]**	Bernoulli, binomiális eo. (0.6), Poisson eloszlás & folyamat (1.4) **[5. HF]**
Okt. 19	Egyenletes eo. (0.3), normális eo. (0.7), Stirling formula (1)	Geom., neg.binom, hipergeom. eo. (0.8), eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.4) **[6. HF]**	Bernoulli, binomiális eo. (0.6), Poisson eloszlás & folyamat (1.4) **[5. HF]**	Geom., neg.binom, hipergeom. eo. (0.8), eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.4) **[6. HF]**
Okt. 26	DeMoivre-Laplace t. (1), exponenciális eo. (0.7), eo. trafó (0.3)	Eo.-sok egyéb jell. (0.3), egyenletes eo. (0.4), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.3), exponenciális eo. (0.3) **[7. HF]**	Geom., neg.binom, hipergeom. eo. (0.8), eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.4) **[6. HF]**	Eo.-sok egyéb jell. (0.3), egyenletes eo. (0.4), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.3), exponenciális eo. (0.3) **[7. HF]**
Nov. 2	Együttes eo. (0.7), többdim. eo.trafó (0.5), többdim. Gauss (0.8)	Exponenciális eo. (0.3), eo. trafó (0.4), Együttes eo. (1.3) **[8. HF]**	Eo.-sok egyéb jell. (0.3), egyenletes eo. (0.4), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.3), exponenciális eo. (0.3) **[7. HF]**	Exponenciális eo. (0.3), eo. trafó (0.4), Együttes eo. (1.3) **[8. HF]**
Nov. 9	Független v.v. (1), konvolúció (0.7), felt. eo.-k (0.3)	Többdim. eo.trafó (0.2), többdim. Gauss (0.5), független v.v. (0.3), konvolúció (0.6), felt. eo.-k (0.4) **[9. HF]**	Exponenciális eo. (0.3), eo. trafó (0.4), Együttes eo. (1.3) **[8. HF]**	Többdim. eo.trafó (0.2), többdim. Gauss (0.5), független v.v. (0.3), konvolúció (0.6), felt. eo.-k (0.4) **[9. HF]**
Nov. 16	Összegek várható é. (0.6), kovariancia (1.4)	Felt. eo.-k (0.6), összegek várható é. (1.4) **[10. HF]**	Többdim. eo.trafó (0.2), többdim. Gauss (0.5), független v.v. (0.3), konvolúció (0.6), felt. eo.-k (0.4) **[9. HF]**	Felt. eo.-k (0.6), összegek várható é. (1.4) **[10. HF]**
Nov. 23	Felt. várh. é. (1.2), Steiner tétel (0.8)	Kovariancia (1.2), felt. várh. é. (0.8) **[11. HF]**	Felt. eo.-k (0.6), összegek várható é. (1.4) **[10. HF]**	Kovariancia (1.2), felt. várh. é. (0.8) **[11. HF]**
Nov. 30	Momentum gen. fv. (0.7), Csebisev egyenlőtlenség & NSZGYT (1.3)	Mom. gen. fv. (0.8), többd. Gauss újra (1.2) **[12. HF]**	Kovariancia (1.2), felt. várh. é. (0.8) **[11. HF]**	Mom. gen. fv. (0.8), többd. Gauss újra (1.2) **[12. HF]**
Dec. 7	CHT (0.7), NSZET (1.3)	Pótlás, érdekességek, stb.	Mom. gen. fv. (0.8), többd. Gauss újra (1.2) **[12. HF]**	Pótlás, érdekességek, stb.

Tételjegyzék

Valószínűségszámítás 1. matematikusoknak és fizikusoknak, 2009 ősz

	Tétel	Előadás (tanóra)	Gyakorlat (tanóra)
1.	Kombinatorikai gyorstalpaló (Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein is)	-	1.3
2.	Eseménytér, egy csöpp mértékelmélet	1.3	-
3.	Egyszerű állítások	0.7	-
3/a.	Szita formula	-	0.7
3/b.	Egyenlő valószínűségű események	-	2
4.	Feltételes valószínűség	0.5	0.8
4/a.	Bayes tétel	1	0.3
5.	Függetlenség, feltételes függetlenség (urnamodellek, számelméleti példák)	1.5	1.9
6.	Diszkrét valószínűségi változok	0.3	1
6/a.	Várható érték, szórás (diszkrét)	0.7	1.3
7.	Bernoulli és binomiális eloszlás	1.3	1.3
8.	Bernoulli NSZTV	1.2	-
9.	Poisson eloszlás (binomiális approximáció, Poisson-folyamat)	1.5	1.4
10.	Geometriai eloszlás (örökifjúság), negatív binomiális, hipergeometriai eloszlás	0.5	0.8
11.	Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény (szinguláris eloszlás is)	0.5	0.8
11/a.	Várható érték, szórás (folytonos; pl.: Cauchy eloszlás)	0.5	0.4
11/b.	Eloszlások egyéb jellemzői: medián, kvantilis, módusz	0.5	0.3
12.	Egyenletes eloszlás	0.3	0.4
13.	Normális eloszlás	0.7	0.7
14.	Stirling formula	1	-
14/a.	DeMoivre-Laplace CHT (bizonyítás, alkalmazások)	1	0.3
15.	Exponenciális eloszlás	0.7	0.6
16.	Egydimenziós eloszlástranszformációk	0.3	0.4
17.	Együttes eloszlások	0.7	1.3
17/a.	Többdimenziós eloszlástranszformációk	0.5	0.2
18.	Többdimenziós Gauss	0.8	0.5
19.	Független valószínűségi változók	1	0.3
19/a.	Független valószínűségi változók összegei (konvolúció)	0.7	0.6
20.	Feltételes eloszlások	0.3	1
21.	Összegek várható értékei	0.6	1.4
22.	Kovariancia, -mátrix, szórások, Schwarz egyenlőtlenség	1.4	1.2
23.	Feltételes várható érték	1.2	0.8
23/a.	Steiner tétel (feltételes várható értékre is)	0.8	-
24.	Momentum generáló függvény	0.7	0.8
24/a.	Többdimenziós Gauss újra	-	1.2
25.	Csebisev egyenlőtlenség és NSZGYT	1.3	-
26.	Centrális határeloszlás tétel	0.7	-
27.	Nagy számok erős törvénye	1.3	-

Házi feladatok

Valószínűségszámítás 1. matematikusoknak és fizikusoknak, 2009 ősz

Minden héten van 4 darab 1 pontos ($^\bullet$) és 6 darab 2 pontos ($^{\bullet\bullet}$) feladat. Ezek közül bármely kombináció beadható úgy, hogy az összpontszám 10 legyen. Minden beadott feladatsoron sorszám szerint növekvő sorrendben javítjuk a feladatokat *addig, amíg a beadott feladatok által elérhető összpontszám eléri a 10 pontot, az ezután szereplő feladatokat nem vesszük figyelembe*[1] (kivételt képeznek ezalól a bónusz feladatok, lásd alább). Ennek ellenére gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is.

Egyes heteken szerepelnek bónusz feladatok, ezek darabonként 2 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az igazi csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

Az i-dik házi feladat beadási határideje az $i+1$-dik gyakorlat kezdete, ahogy az ütemtervben is szerepel.

1.HF:

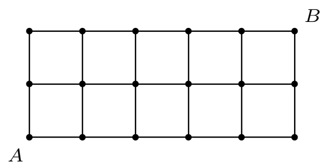
HF 1.1$^\bullet$ János, Jakab, József, Joli és Jenő egy együttest alkotnak, mely öt hangszeren játszik. Ha mindegyikük tud mind az öt hangszeren játszani, hányféle elrendezés lehetséges? És ha János, Jakab és Joli mind az öt hangszeren játszhat, de József és Jenő mindketten csak dobolni és zongorázni tudnak?

HF 1.2$^\bullet$
- **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?
- **b)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, hogy ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?
- **c)** És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?
- **d)** Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

HF 1.3$^\bullet$ Egy tánciskolába 10 hölgy és 12 úriember jár. Ha 4 hölgyet és 4 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

HF 1.4$^{\bullet\bullet}$ Egy társaság 9 nőből és 5 férfiból áll. Belőlük kell egy 3 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha
- **a)** a férfiak közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,
- **b)** a nők közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,
- **c)** egy nő és egy férfi nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

HF 1.5$^\bullet$ Az alábbi rácson hányféleképpen lehet A-ból B-be eljutni csak jobbra vagy felfelé lépésekkel?



HF 1.6$^{\bullet\bullet}$ Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

HF 1.7$^{\bullet\bullet}$
- **a)** Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

- **b)** Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

[1]Elvileg elképzelhető olyan eset is, hogy a beadott feladatok által elérhető összpontszám sorszám szerinti sorrendben haladva 9-ről 11-re nő. Ekkor biztosan van korábban legalább egy egy pontos feladat (miért?). Ilyenkor az addigi legmagasabb sorszámú egy pontos feladatot nem értékeljük.

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

HF 1.8•• Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

HF 1.9•• **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

ha $\mathbf{P}\{A\} \geq 0.7$ és $\mathbf{P}\{B\} \geq 0.5$, akkor $\mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.2$.

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

HF 1.10•• n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

a) a golyók megkülönböztethetőek,

b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

2.HF:

HF 2.1•• 8 bástyát véletlenszerűen elhelyezünk a sakktáblán. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)?

HF 2.2• Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.

a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

HF 2.3• Aladár és Béla beszállnak egy liftbe egy tíz emeletes ház földszintjén. Feltéve, hogy semmi közük egymáshoz, és mindketten teljesen egyenletesen választanak emeletet, mi a valószínűsége, hogy Aladár magasabbra megy mint Béla?

HF 2.4•• Egy urnában 3 piros és 6 fekete golyó van. A és B visszatevés nélkül felváltva húznak az urnából egészen addig, amikor először piros golyó kerül elő. Ha A húzott először, mi a valószínűsége, hogy ő húz először piros golyót?

HF 2.5• Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

HF 2.6•• Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, 3, 4$?

Bónusz: Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, \ldots, n$?

HF 2.7• Hat ember, név szerint A, B, C, D, E, F, egy sorba ülnek véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy A és B között pontosan i ember ül, $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

HF 2.8•• Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

HF 2.9•• Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

HF 2.10•• Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymasután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

Bónusz: Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?

3.HF:

HF 3.1••

a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

HF 3.2• Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?

c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

HF 3.3•• Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

HF 3.4• Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.01, 0.02, 0.04 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

HF 3.5• Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 8 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 4 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

HF 3.6•• Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

1. Feldobjuk az érmét.
2. Megint feldobjuk az érmét.
3. Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.
4. Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.

b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

HF 3.7•• Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)

b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

HF 3.8• Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Mutassuk meg, hogy A, B és C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

HF 3.9•• Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \geq 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \geq 0$ esetén.

Bónusz: Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 675x^{-2} \qquad (x \geq 30).$$

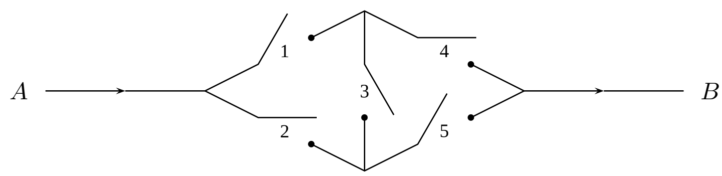
Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

HF 3.10•• Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

4.HF:

HF 4.1•• Alább egy áramkör, ahol mindegyik kapcsoló egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel van nyitva vagy zárva.



Mi a valószínűsége, hogy A-tól B-ig áram folyhat ezen az áramkörön? (Ezért itt külön nem jár pont, de érdekes: válaszoljunk számolás nélkül is, szimmetriák segítségével! (Persze ha valaki ezt helyesen megcsinálja és nem számol, az is teljes értékű megoldás.))

HF 4.2• 50 százalék az esélye, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50-50 százalék az esélye arra, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő három fia nem hemofíliás, mekkora az esélye annak, hogy a királynő hordozó? Ha születik egy negyedik herceg is, mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz?

HF 4.3• 5 férfit és 5 nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és mind a 10! elrendezés egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását.

HF 4.4•• Öt játékos, A, B, C, D, E között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-től 5-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg X eloszlását.

HF 4.5•• Egy családban $n \geq 1$ gyermek αp^n valószínűséggel van, ahol $\alpha \leq (1-p)/p$.

a) A családok hányadrészében nincs gyermek?

b) Ha a gyermekek egymástól függetlenül egyforma eséllyel fiúk és lányok, akkor a családok hányadrészében lesz pontosan k fiú (és tetszőleges számú lány)?

HF 4.6•• Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?
Megjegyzés: Ez volt a nyerés feltétele a XVII. században divatos „passe dix” játékban.

HF 4.7$^\bullet$ Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? ($k = 1, 2, \dots, n$)

b) Feltéve, hogy mind az első $k-1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? ($k = 1, 2, \dots, n$)

HF 4.8$^\bullet$ Egy ketyere két különböző okból romolhatott el. Az első ok ellenőrzése E_1 forintba kerülne, és ha valóban az a probléma, akkor a javítása J_1 forint. Hasonlóan, a második ok ellenőrzése E_2 forintba kerül, és ha az a probléma, akkor a javítás J_2 forint. (Ha viszont az először ellenőrzött oknál nincs probléma, akkor a másik lehetséges okot először ellenőriznünk kell, majd javítanunk.) Legyen p és $1-p$ annak valószínűségei, hogy a ketyere az első illetve a második okból romlott el. Határozzuk meg, mely $E_1,\ E_2,\ J_1,\ J_2,\ p$ értékek mellett érdemesebb várhatóan az első okkal kezdeni az ellenőrzést, és melyeknél a második okkal.

HF 4.9$^{\bullet\bullet}$ A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

HF 4.10$^{\bullet\bullet}$ Sárkányföldön az n fejű sárkány

$$p_n = \binom{6}{n-1} \cdot 0.7^{n-1} \cdot 0.3^{7-n}$$

valószínűséggel fordul elő ($n = 1, 2, \dots, 7$). Egy sárkány fejeinek levágása veszélyes művelet: az ember minden fejét egymástól függetlenül 90% eséllyel tudja levágni, és ha ez nem sikerül, akkor a sárkány megeszi az embert.

a) Elém kerül egy sárkány, de a nagy ködben nem látom, hogy hányfejű. Mi az esélye, hogy túlélem a találkozást?

b) Tegyük fel, hogy épp most vágtam le a hatodik fejét, de még mindig nem látom, hogy maradt-e feje. Ilyen helyzetből mekkora valószínűséggel élem túl a harcot?

c) Csata után találkozom a cimborámmal, aki szintén legyőzött egy sárkányt. Ezt figyelembe véve mi a valószínűsége, hogy hétfejűvel volt dolga?

5.HF:

HF 5.1$^\bullet$ 4 buszon összesen 148 tanuló utazik. Az egyes buszok rendre 40, 33, 25 és 50 tanulót szállítanak. Válasszunk ki véletlenszerűen egy tanulót; ekkor jelölje X azt, hogy hány tanuló utazik azon a buszon, amelyik a kiválasztott tanulót szállítja. Válasszunk véletlenszerűen egy sofőrt. Y jelölje azt, hogy a sofőr buszán hány tanuló utazik.

a) Mit gondolunk, X vagy Y várható értéke nagyobb? Miért?

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{E}(Y)$-t!

c) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(X)$-et és $\mathbf{D}^2(Y)$-t is!

HF 5.2$^{\bullet\bullet}$ A és B a következő játékot játssza: A gondol 1-re vagy 2-re, ezt leírja majd B-nek ki kell találnia, melyik számra gondolt A. Ha az A által leírt szám i és B jól tippelt, akkor B i egységet kap A-tól. Ha B melléfog, akkor ő fizet A-nak $\frac{3}{4}$-t. Ha B randomizálja tippjét, azaz p valószínűséggel tippel 1-re és $1-p$ valószínűséggel 2-re, határozzuk meg nyereménye várható értékét, amennyiben

a) az A által leírt szám az 1,

b) az A által leírt szám a 2.

Milyen p érték maximalizálja B minimális várható nyereményét, és mi ez a maximin érték? (Figyeljük meg, hogy B várható nyereménye nem csak p-től függ, hanem attól is, hogy mit csinál A.)
Tekintsük most az A játékost. Tegyük fel, hogy ő is randomizálja a döntését, és q valószínűséggel gondol 1-re. Mennyi A várható vesztesége,

c) ha B 1-re tippel, ill.

d) ha B 2-re tippel?

Mely q értékkel tudja A minimalizálni a maximális várható veszteségét? Mutassuk meg, hogy A maximális várható veszteségének minimuma egyenlő B minimális várható nyereségének maximumával! Ezt az eredményt hívják minimax tételnek, ami a játékelmélet egyik alapvető eredménye, és általánosan először Neumann János fogalmazta meg. A közös értéket a játék értékének hívják (B számára).

HF 5.3$^\bullet$ Egy gép véletlenszerűen választ 1 és 10 közötti számot, amit nekünk kell kitalálni, úgy, hogy kérdéseket teszünk fel, amire a gép igennel vagy nemmel válaszol. Számoljuk ki, várhatóan hány kérdést kell a gépnek feltennünk,

a) ha csak rákérdezhetünk, azaz azt kérdezzük, hogy „A gondolt szám i?” $i = 1, 2, \ldots, 10$, illetve

b) ha kérdéseinkkel mindig megpróbáljuk megfelezni a fennmaradó lehetséges számok körét.

HF 5.4$^\bullet$ **(Szentpétervári paradoxon)** Egy érmével addig dobunk, míg a fej oldalára nem esik. Ha az n-edik feldobás eredménye fej, akkor a játékos 2^n forintot nyer. Mutassuk meg, hogy a nyeremény várható értéke végtelen!

a) Megéri-e egy játékért 1 millió forintot fizetni?

b) Megéri-e játékonként 1 millió forintot fizetni, ha addig játszunk, amíg csak akarunk, és a játék befejezéskor van elszámolás?

HF 5.5$^{\bullet\bullet}$ Minden este több különböző meteorológus jósolja meg, mekkora valószínűséggel fog holnap esni az eső. Hogy megítéljük, mennyire jók a meteorológusok, a következőképpen pontozzuk őket: ha egy meteorológus p valószínűséggel jósolt esőt, akkor

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2 & \text{pontot kap, ha valóban esik másnap,} \\ 1-p^2 & \text{pontot kap, ha nem esik.} \end{array}$$

Ezek után egy rögzített időszakban mérjük az egyes meteorológusok átlagpontszámát, és a legjobb előrejelző a legmagasabb pontszámot kapott meteorológus lesz. Tegyük fel, hogy az egyik meteorológus tudja ezt, és maximalizálni szeretné átlagát. Ha azt gondolja, hogy p^* valószínűséggel fog esni holnap, mekkora p értéket érdemes jelentenie?

HF 5.6$^{\bullet\bullet}$ Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, számoljuk ki

a) $\mathbf{E}(2+X)^2$-t és

b) $\mathbf{D}^2(4+3X)$-t.

HF 5.7$^{\bullet\bullet}$ N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i).$$

(*Tipp:* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{k=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = k)$. *És most szummacsere!*)

HF 5.8$^{\bullet\bullet}$ N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N > i) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)\big).$$

HF 5.9$^{\bullet\bullet}$ Egy m családból álló közösségben n_i családban van i gyerek ($\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = m$). Legyen X egy véletlenszerűen választott családban a gyerekek száma. Válasszunk ki véletlenszerűen a $\sum\limits_{i=1}^{r} in_i$ gyerek közül egyet; jelölje Y azt, hogy a kiválasztott gyerek családjában hány gyerek van. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$.

HF 5.10$^\bullet$ Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

6.HF:

HF 6.1$^\bullet$ Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül $1-p$ valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy háromotoros?

HF 6.2$^\bullet$ 10-szer feldobunk egy hamis pénzérmét, ami p valószínűséggel ad fejet. Ha tudjuk, hogy összesen 6-szor lett fej az eredmény, mi a valószínűsége, hogy az első 3 eredmény rendre

a) F, I, I (azaz az első fej, a második és a harmadik írás);

b) I, F, I?

HF 6.3$^\bullet$ Egy bulvárlapban oldalanként várhatóan 0.2 nyomtatási hiba van. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő oldalon

a) 0,

b) 2 vagy több hiba van?

Indokoljuk a választ!

HF 6.4$^{\bullet\bullet}$ Egy államban az öngyilkossági ráta 1 öngyilkosság per 100 000 lakos per hónap. Vizsgáljuk meg az állam egy 400 000 lakosú városát!

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott hónapban több, mint 7 ember lesz öngyilkos?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott évben legalább 2 hónapban lesz több, mint 7 öngyilkosság?

c) Legyen a mostani hónap az 1., mi a valószínűsége annak, hogy először az i. hónapban lesz több, mint 7 öngyilkosság? ($i \geq 1$)

Milyen feltevésekkel éltünk?

HF 6.5$^{\bullet\bullet}$ Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X = i\}$ i növekedésével először nő, majd monoton csökken, a maximumát a $i = \lfloor\lambda\rfloor$-nél veszi fel. (*Tipp: tekintsük* $\mathbf{P}\{X = i\}/\mathbf{P}\{X = i-1\}$*-et.*)

HF 6.6$^{\bullet\bullet}$ Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{X \text{páros}\} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}).$$

HF 6.7$^{\bullet}$ Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

HF 6.8$^{\bullet\bullet}$ Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset?
(Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

HF 6.9$^{\bullet\bullet}$ Számítsuk ki az $(1 + X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:

a) ha X Binom(n, p) eloszlású;

b) ha X Poi(λ) eloszlású.

(*Tipp: integráljunk valami szépet.*)

HF 6.10$^{\bullet\bullet}$ Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett sok akadály mindegyikét egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 5% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legfeljebb három akadályt ver le?

7.HF:

HF 7.1$^{\bullet\bullet}$ Egy országban a házaspárok az első fiúig vállalnak gyereket. Mi a nemek eloszlása ebben az országban? Igaz-e, hogy az egy családban született gyerekek neme független egymástól?

HF 7.2$^{\bullet}$ Tegyük fel, hogy X eloszlásfüggvénye, F a következőképpen adott:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 0 \\ \dfrac{b}{4} & \text{ha } 0 \leq b \leq 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{b-1}{4} & \text{ha } 1 < b \leq 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{ha } 2 < b \leq 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < b \end{cases}$$

a) Számoljuk ki $\mathbf{P}\{X = i\}$-t, $i = 1, 2, 3$.

b) Mennyi $\mathbf{P}\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$?

HF 7.3$^{\bullet}$ Egy urnában 4 piros és 4 kék golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük piros és 2 kék, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 piros lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk?

HF 7.4$^{\bullet\bullet}$ **a)** Egy rendszer egy eredeti és egy pót egységből áll, így a teljes rendszer a bekapcsolástól számítva X hónapig működik. Határozzuk meg X várható értékét, és annak valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} Cx\mathrm{e}^{-x/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

b) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^3) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} C(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e f ill. g sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg C-t és az f ill. g által meghatározott eloszlások várhatóértékét!

c) Milyen α és c értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény?

$$F(x) = \exp(-ce^{-\alpha x})$$

HF 7.5• Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

HF 7.6• Tudjuk, hogy minden Y nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > t\}\,\mathrm{d}t.$$

Mutassuk meg, hogy egy X nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty nx^{n-1}\mathbf{P}\{X > x\}\,\mathrm{d}x$$

teljesül. (*Tipp: kezdjük azzal, hogy*

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X^n > t\}\,\mathrm{d}t,$$

majd cseréljünk változót ($t := x^n$).)

HF 7.7•• **a)** Legyen X valószínűségi változó várható értéke μ, szórásnégyzete σ^2, és legyen g egy kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(g(X)) \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2.$$

(*Tipp: fejtsük g-t μ körül 3 tagig Taylor sorba, és hanyagoljuk el a megmaradó részt!*)

b) Legyen X egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha λ nem túl kicsi, akkor

$$\mathbf{D}^2(\sqrt{X}) \approx 0.25.$$

Lepődjünk meg. (*Tipp: használjuk fel az előző feladatot $\mathbf{E}(\sqrt{X})$ közelítésére!*)

HF 7.8•• Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer?

b) Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

c) A várható időtartam azonnal adódik, ha $p_1 = p_2$ (miért?). Ellenőrizzük le, hogy az előző kérdésre adott válaszunk ebben az esetben az, ami azonnal adódik.

HF 7.9•• Legyen $F(x)$ *folytonos* eloszlásfüggvény, és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \le 1, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha } 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

HF 7.10•• Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0,\, 1] \to [0,\, \infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

Bónusz: Az árokugró versenyfutás szabályai a következők: A futópálya egyenes, és van rajta végtelen sok egyforma árok. Két egyforma képességű versenyző méri össze az erejét árokfutásból, akik fej fej mellett futnak. Egy versenyző egymás után át próbálja ugrani az árkokat, végül egyszer túl kicsit ugrik és beleesik valamelyikbe. Tegyük fel, hogy egy versenyző sohasem fárad el, és az árkokat egymástól függetlenül, egyenként 2^{-L} valószínűséggel tudja átugorni, ahol L az árok hossza. Ha az egyikük beleesett egy árokba, akkor véget ért a verseny.

a) Mutassuk meg, hogy a döntetlen valószínűsége pontosan akkor kisebb ε-nál, ha

$$L < \log_2\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

teljesül.

b) Ha döntetlen, akkor visszaküldjük őket a startvonalhoz és újra kezdődik a verseny. Ezt ismételjük egészen addig, amíg győztest nem hirdethetünk. Mekkora legyen L, ha a versenyzők ugrásainak számának várható értékét akarjuk minimalizálni?

8.HF:

HF 8.1• A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

HF 8.2•• Egy busz A és B városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

HF 8.3• Tegyük fel, hogy X normális eloszlású, 5 várható értékkel. Ha $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

HF 8.4• Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?

HF 8.5• Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

HF 8.6•• Mutassuk meg, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (*Tipp:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$. *Helyettesítsünk* $y = \sqrt{2x}$*-et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!*)

HF 8.7•• Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált „abszolút momentumait" (φ a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k\,\mathrm{d}y, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(*Tipp: páros* $k = 2\ell$*-re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:*

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2}\,\mathrm{d}y\bigg|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2\ell + 1$*-re hajtsuk végre a* $z = y^2$ *változócserét az* A_k*-t definiáló integrálban.*)

HF 8.8•• Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2\sigma^2)}\left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3}\right) \quad < \quad \mathbf{P}\{X > x\} \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2\sigma^2)}\frac{\sigma}{x}.$$

(*Tipp: differenciáljuk az egyenlőtlenség-lánc mindhárom tagját és hasonlítsuk össze a deriváltakat.*)

HF 8.9$^{\bullet\bullet}$ Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal, a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűséggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0,1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}\{|p'-p| \leq 0.005\} \geq 0.95.$$

HF 8.10$^{\bullet\bullet}$ Van két egyforma biztosítótársaság, egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

Bónusz: **(A Poisson eloszlás normális approximációja.)** Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$-re

$$\sqrt{\lambda} \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(\lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\lambda+\beta\sqrt{\lambda}} p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(k) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.

9.HF:

HF 9.1$^{\bullet}$ Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású $(-\pi/2, \pi/2)$-n. (*Az ilyen valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.*)

HF 9.2$^{\bullet}$
- **a)** Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és $c > 0$. Mutassuk meg, hogy cX szintén exponenciális eloszlású, λ/c paraméterrel.
- **b)** Most legyen X sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mi az $Y = aX + b$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
- **c)** Most legyen X standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $1/X$ is standard Cauchy eloszlású! Egy standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty.$$

HF 9.3$^{\bullet\bullet}$
- **a)** Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (Y *eloszlását lognormálisnak nevezik.*)
- **b)** Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy ekkor CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (*Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk tudásunkat a normális valószínűségi változó lineáris transzformáltjairól.*)
- **c)** Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $m = -0.5$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

HF 9.4$^{\bullet}$ Két szabályos kockával dobunk. Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét, ha
- **a)** X a dobott számok maximuma, Y a két dobott érték összege;
- **b)** X az első kocka eredménye, Y a dobott számok maximuma;
- **c)** rendre X, Y a dobott számok minimuma, ill. maximuma.

HF 9.5$^{\bullet\bullet}$ Legyenek X és Y független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. (Azaz: $\mathbf{P}\{X = i,\, Y = j\} = (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{j-1} \cdot p,\ i, j > 0$.)

a) Sejtsük meg $\mathbf{P}\{X = i \mid X+Y = n\}$ értékét. (*Tipp: tegyük fel, hogy egy cinkelt érmét dobunk fel, egymás után sokszor. Az érme p valószínűséggel ad fejet. Ha a második fej az n-edik feldobásnál jön, mi az első fej bekövetkezése idejének eloszlása?*)

b) Igazoljuk (a)-beli eredményünket számolással. (*Tipp: ugye még emlékszünk mi független geometriai várakozási idők összegének az eloszlása?*)

HF 9.6$^{\bullet\bullet}$ Egy ropit két, egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így nyert három darab mindegyike rövidebb mint az $a \in [\ell/3,\ \ell]$ rögzített szám? (ℓ a ropi hossza.)

HF 9.7$^{\bullet\bullet}$ Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy egyenlő oldalú háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje ξ e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

HF 9.8$^{\bullet}$ Legyen ξ az X pont távolsága a sík $(1,\ 1)$ koordinátájú pontjától, ha

a) X-et az x-tengely $[0,\ 1]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk;

b) X-et az x-tengely $[0,\ 2]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk.

A két esetben határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

HF 9.9$^{\bullet\bullet}$ Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény ($x,\ y \in \mathbb{R}$)?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

HF 9.10$^{\bullet\bullet}$ Legyen X egyenletes eloszlású a $[-3,\ 4]$ intervallumon, és legyen $\Psi(x) = |x-1| + |x+1|$. Határozzuk meg az $Y = \Psi(X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvényét. Abszolút folytonos eloszlású-e Y? Adjuk meg a G eloszlásfüggvény Lebesgue-féle felbontását diszkrét, abszolút folytonos és folytonos de szinguláris nem csökkenő függvények összegére.

10.HF:

HF 10.1$^{\bullet}$ A patikába egy óra alatt betérő emberek száma Poisson eloszlású $\lambda = 10$ paraméterrel. Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy legfeljebb 3 férfi tért be, feltéve, hogy 10 nő tért be a patikába abban az órában. Milyen feltevésekkel éltünk?

HF 10.2$^{\bullet}$ Egy férfi és egy nő találkozót beszélt meg 12:30-ra. Ha a férfi 12:15 és 12:45 között egyenletes eloszlású időben érkezik, és tőle függetlenül a nő 12:00 és 13:00 között egyenletes eloszlású időben érkezik,

a) határozzuk meg annak valószínűségét, hogy aki először érkezik, 5 percnél kevesebbet vár.

b) Mi a valószínűsége, hogy a férfi érkezik elsőnek?

HF 10.3$^{\bullet\bullet}$ n pontot függetlenül egyenletesen elosztunk egy kör kerületén, és szeretnénk meghatározni annak valószínűségét, hogy mind egy félkörbe esnek (vagyis annak valószínűségét, hogy van egy olyan, a kör középpontján átmenő egyenes, melynek az összes pont az egyik oldalán van). Jelölje $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ a pontokat. Legyen A az az esemény, hogy az összes pont egy félkörbe esik, és A_i az az esemény, hogy az összes pont abba a félkörbe esik, amely P_i-től indul az óramutató járásával egyező irányban, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

a) Fejezzük ki A-t az A_i-k segítségével.

b) Igaz-e, hogy az A_i-k kölcsönösen kizáróak?

c) Határozzuk meg $\mathbf{P}\{A\}$-t.

d) Most válaszoljuk meg a következő kérdést: ha egy *körlapon* egymástól függetlenül n pontot egyenletes eloszlással elhelyezünk, mi a valószínűsége, hogy a kör középpontja benne lesz a pontok konvex kombinációiként előálló halmazban?

HF 10.4$^{\bullet}$ Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,\ y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Független-e X és Y? És ha a közös sűrűség

$$f(x,\ y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < y < 1,\ 0 < x < y, \\ 0, & \text{egyébként?} \end{cases}$$

HF 10.5$^{\bullet\bullet}$ **a)** Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\ 1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.

b) Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\ 1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását.

c) Legyenek $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását, és a $\mathbf{P}\{X < Y\}$ valószínűséget.

d) Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X + Y$ és $V := X/(X + Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

HF 10.6•• **a)** Legyen X és Y a két koordinátája annak a pontnak, melyet az origó középpontú, 1 sugarú körlapon egyenletesen választottunk. (Azaz: a közös sűrűségfüggvény $f(x,\, y) = 1/\pi$, ha $x^2 + y^2 \le 1$.) Határozzuk meg az $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ és a $\Theta = \operatorname{arc\,tg} Y/X$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvényét.

b) Legyen U_1, U_2 két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$ és $Y = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$, akkor az (X, Y) pár kétdimenziós normális eloszlású.

HF 10.7•• Mutassuk meg *számolással*, hogy ha X_i, $i = 1, \ldots, n$ független azonos eloszlású geometriai valószínűségi változók, akkor $X_1 + \cdots + X_n$ negatív binomiális eloszlású. Használjunk indukciót. (A valószínűségszámítási érvelést már láttuk előadáson.)

HF 10.8•• Legyen $\underline{X} = (X_1,\, X_2,\, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő változókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \qquad i = 1, 2, 3.$$

a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\underline{\xi} = (\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\underline{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.

HF 10.9•• Legyenek X és Y független $\mathcal{N}(0, 1)$. illetve $\mathcal{N}(0, 4)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái $(X;\, Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

a) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1,\ |y| \le 2\}$,

b) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ |y| \le 2\}$,

c) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$,

d) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y \le 0,\ |x| \le 1,\ y \ge -2\}$,

e) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \le 1\}$,

f) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \le c^2\}$.

HF 10.10• Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?

Bónusz: Legyenek X, Y és Z független, azonos $\mathrm{Geom}(p)$ eloszlású valószínűségi változók.

a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}\{X = Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X \ge 2Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X + Y \le Z\}.$$

b) Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

11.HF:

HF 11.1• Két dobókockával dobunk, legyen X a nagyobb, Y a kisebb dobott szám. Számoljuk ki Y feltételes súlyfüggvényét, az $X = i,\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6$ feltétel mellett. Független egymástól X és Y? Miért?

HF 11.2•• **a)** X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right) \mathrm{e}^{-x} \qquad 0 \le x < \infty,\ -x \le y \le x.$$

Mi Y feltételes eloszlása, $X = x$ feltétel mellett?

b) Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}\{Z = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{Z = 0\}$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1 - Z)Y, \qquad U := ZX + (1 - Z)\max\{X,\, Y\}, \qquad V := ZX + (1 - Z)\min\{X,\, Y\}.$$

HF 11.3• Egymástól függetlenül N ember érkezik egy üzleti vacsorára. Amikor megérkezik, minden ember körülnéz, hogy van-e a már megjelentek között barátja, majd vagy odaül az egyik barátjának az asztalához, vagy egy üres asztalhoz ül, ha nem érkezett meg még egy barátja sem. Ha bármely két ember mindentől függetlenül p valószínűséggel barátja egymásnak, számoljuk ki az elfoglalt asztalok várható számát! (*Tipp: legyen X_i annak az indikátora, hogy az i-edik megérkező üres asztalhoz ül. (Azaz $X_i = 1$, ha üres asztalhoz ül, és $X_i = 0$, ha nem.)*)

HF 11.4•• Véletlenszerűen sorbanáll n férfi és n nő.

a) Mennyi azon férfiak várható száma, akik mellett (azaz előtt vagy mögött) nő áll a sorban?

b) Mennyi lenne a válasz, ha nem sorbanállnának, hanem egy kerekasztal köré ülnének le?

HF 11.5• Adott egy 100 emberből álló csoport.

a) Mennyi azon napok várható száma, amikor legalább 3 embernek van közülük születésnapja?

b) Várhatóan hány olyan nap van egy évben, amikor közülük valakinek születésnapja van?

HF 11.6•• Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók sorozata, legyen $N \geq 2$ olyan, hogy

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{N-1} < X_N.$$

Azaz az N-edik az első tagja a sorozatnak, ahol a sorozat növekvővé válik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(N) = \mathrm{e}$! (*Tipp: érdemes először kiszámolni $\mathbf{P}\{N \geq n\}$-t.*)

HF 11.7•• **a)** Legyenek X és Y független, nemnegatív értékű folytonos valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}X < \infty$ és $\mathbf{E}Y < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\min\{X,\, Y\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X \geq t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \geq t\}\ \mathrm{d}t.$$

b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független, nemnegatív értékű folytonos X_1, $X_2, \ldots X_k$ valószínűségi változóra, melyekről feltesszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E}\min\{X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_k\} = \int_0^\infty \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{X_j \geq t\}\ \mathrm{d}t.$$

c) Az a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\max\{X,\, Y\} = \int_0^\infty [1 - \mathbf{P}\{X \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \leq t\}]\ \mathrm{d}t.$$

d) Legyenek X_1, $X_2, \ldots X_k$ független, $(0,\, 1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\mathbf{E}\min\{X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_k\}, \qquad \mathbf{E}\max\{X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_k\}$$

várható értékeket.

HF 11.8•• n-szer feldobunk egy p valószínűséggel fejet adó érmét. Számoljuk ki az $1,\, 2,\, \ldots,\, k$ hosszú csupa fej részsorozatok várható számát! $(1 \leq k \leq n)$

HF 11.9•• Legyenek $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ független és azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy egy rekord érték tűnik fel j-kor ($j \leq n$), ha $X_j \geq X_i$ minden $1 \leq i \leq j$ esetén. Mutassuk meg, hogy

a) $\mathbf{E}[\text{rekord értékek száma}] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$,

b) $\mathbf{D}^2[\text{rekord értékek száma}] = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{j^2}$.

HF 11.10• Legyenek X és Y független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók. $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} = ?$

Bónusz: Három próbálkozási lehetőségünk van, mindegyik próbálkozás azonos valószínűséggel sikeres. Jelölje X a sikeres próbálkozások számát. Ha tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X) = 1.8$,

a) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legnagyobb értéke?

b) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legkisebb értéke?

Mindkét esetben találjunk ki egy valószínűségi forgatókönyvet, aminek eredménye $\mathbf{P}\{X = 3\}$, és ez az érték a lehető legnagyobb/legkisebb. (*Tipp: a b) rész megoldását kezdhetjük úgy is, hogy legyen U a $(0, 1)$-en egyenletes valószínűségi változó, majd definiáljuk a próbálkozásokat U-val kifejezve.*)

12.HF:

HF 12.1• **a)** Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg $\mathbf{E}[(2+X)^2]$ és $\mathbf{D}^2(4+3X)$ értékét.

b) Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X-Y)^2]$ értékét.

HF 12.2• 10 házaspár ül le véletlen elhelyezéssel egy kerekasztalhoz. Számítsuk ki

a) a várhatóértékét,

b) a szórásnégyzetét

annak, hogy hány férj ült a felesége mellé.

HF 12.3•• **a)** Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

b) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

HF 12.4• X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X^2|Y = y)$-t is.

HF 12.5•• Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. (Ezt hívják Erdős-Rényi véletlen gráfnak.) Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (*Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az $X_i,\ X_j$, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.*)

HF 12.6•• Egy liftbe a földszinten belépő emberek száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, 10 várható értékkel. n emelet van és minden ember egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel száll ki az n emelet bármelyikén. Számoljuk ki, várhatóan hányszor áll meg a lift, míg az utolsó utast is kirakja.

HF 12.7•• Egy ember autóbaleseteinek száma egy adott évben λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ez a λ paraméter minden embernél más és más, a népesség 60 százalékánál 2, 40 százalékánál 3. Ha véletlenül kiválasztunk egy embert, mi a valószínűsége annak, hogy

a) nem történt vele baleset,

b) pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben?

c) Mi a feltételes valószínűsége, hogy pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben, feltéve, hogy előző évben nem történt vele baleset?

d) Ismételjük meg az előzőeket, ha az x-nél kisebb λ paraméterrel rendelkező emberek aránya a népességben $1-\mathrm{e}^{-x}$.

HF 12.8• Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$$

értékét. (*Tipp:* $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$.)

HF 12.9•• Legyen X standard normális eloszlású, és I X-től független, $\mathbf{P}\{I = 1\} = \mathbf{P}\{I = 0\} = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y := \begin{cases} X, & \text{ha } I = 1, \\ -X, & \text{ha } I = 0. \end{cases}$$

Azaz: Y (X-től függetlenül) egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

a) Független-e X és Y?

b) Független-e I és Y?

c) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.

d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\,Y) = 0$.

HF 12.10•• Az $(X,\,Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = (-1, 1)$ várható-érték-vektorral és $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{X \geq -1,\ Y \geq 1\}$ valószínűséget! (*Tipp:* $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^2$, *ahol* $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)

Bónusz: **a)** A feltételes kovariancia a feltételes várható értékkel úgy van definiálva, mint a kovariancia a várható értékkel. Vezessük le a *feltételes kovariancia formulát*:

$$\mathbf{Cov}(X,\,Y) = \mathbf{E}\big(\mathbf{Cov}(X,\,Y \mid Z)\big) + \mathbf{Cov}\big(\mathbf{E}(X \mid Z),\,\mathbf{E}(Y \mid Z)\big).$$

b) Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írásé* pedig $q = 1-p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, illetve a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\ldots$, akkor $X = 3$, $Y = 2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\ldots$, akkor $X = 1$, $Y = 2\ldots$) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}X^2$, $\mathbf{E}Y^2$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{D}^2Y$, $\mathbf{Cov}(X,\,Y)$.

Bónusz: Egy négyzetrácsos papírra egy tintapaca csöppen. Mekkora a valószínűsége, hogy a paca nem metszi a vonalakat, ha azok fél centire vannak egymástól, a tintafolt sugara pedig egyenletes eloszlású a $[0\,\text{cm},\ 1/3\,\text{cm}]$ intervallumon?