Félévi időbeosztás (nagyjából) **házi feladat beadási határidőkkel** (pontosan)
Valószínűségszámítás 2. matematikusoknak és fizikusoknak, 2009 tavasz

Dátum	**Téma**	**beadandó**
Feb 12Cs	Konvolúció (normális, Cauchy, exponenciális)	
Feb 19Cs / 20P	↑ *gyakorlat* ↑	
Feb 26Cs	Konvolúció; gen. fv-ek, elágazó folyamatok, bolyongások	**1. HF**
Már 5Cs / 6P	↑ *gyakorlat* ↑	
Már 12Cs	Gen. fv-ek, elágazó folyamatok, bolyongások; karakterisztikus fv-ek	**2. HF**
Már 19Cs / 20P	↑ *gyakorlat* ↑	
Már 26Cs	Karakterisztikus fv-ek, CHT	**3. HF**
Már 31K Ápr 2Cs / 3P	**1. ZH 17:15-kor, K140** ↑ *gyakorlat* ↑	
Ápr 9Cs	Véges Markov láncok: alapfogalmak	**4. HF**
Ápr 16Cs / 17P	↑ *gyakorlat* ↑	
Ápr 23Cs	Véges Markov láncok: stacionárius eloszlás; végtelen Markov láncok	**5. HF**
Ápr 30Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Máj 5K Máj 7Cs	**2. ZH 17:15-kor, K140** Végtelen Markov láncok: rekurrencia-tranziencia	 **6. HF**
Máj 14Cs / 15P	↑ *gyakorlat* ↑	

A házi feladatok jelen file-ban kerülnek kitűzésre, és előadás kezdetekor (páratlan hét csütörtökök 8:30) beadandók. Minden feladat számít, és annyi pontot ér, ahány • van mellette. Az 1. ZH anyaga az első három előadás és gyakorlat, a 2. ZH anyaga az első hat, főképpen 4., 5. és 6. előadás és gyakorlat.

1.HF: (Beadandó: február 26)

HF 1.1••• Móricka matematikushallgató a BME-n, Valószínűségszámítás 1. gyakorlatból próbál átmenni. Ha nem sikerül neki az egyik félévben, akkor a következő félévben újra próbálkozik. Az egymást követő félévek próbálkozásainak kimenetele független, és minden félévben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel bukik meg. Ha az aláírást megszerezte, még ugyanabban a félévben próbálkozik az elméleti vizsgával. Ha ez nem sikerül, akkor a következő félévben újra próbálkozik az elméleti vizsgával, egészen addig, amíg át nem megy ezen is. Az egyes félévekben elméletből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel megy át. Határozzuk meg Móricka Valószínűségszámítás 1.-el töltött félévei számának az eloszlását!

HF 1.2•• Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint a és b valós számok, akkor $U = aX + bY$ és $V = bX - aY$ valószínűségi változók is függetlenek. Részletesen indokoljunk! Milyen eloszlású lesz U és V?

HF 1.3••• Legyen X és Y független $\mathrm{Exp}(\lambda)$, illetve $\mathrm{Exp}(\mu)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Z := X + Y$ sűrűségfüggvényét. Mi történik a $\lambda \to \mu$ határátmenetben?

HF 1.4••• Legyen X és Y független, $\mathrm{Poi}(\lambda)$, illetve $\mathrm{E}(0,\,1)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $Z := X + Y$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

HF 1.5••• Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös sűrűségfüggvénye $f(x) = 3x^2 \cdot \mathbf{1}\{x \in [0,\,1]\}$. Határozzuk meg az $U := X + Y$ és a $V := X - Y$ valószínűségi változók (marginális) sűrűségfüggvényét.

HF 1.6••• Legyenek $X_1,\, X_2,\, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$.

- **a)** Adjuk meg S_2 sűrűségfüggvényét.
- **b)** Határozzuk meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \ldots$-ra $\mathbf{P}\{N(t) = k\}$ értékét! (Számolás nélkül is megy, ha jól megértettük miről van szó.)

HF 1.7••• Legyen X egyenletes a $\{0,\, 1,\, \dots,\, n-1\}$ halmazon. Bizonyítsuk be, hogy ha n nem prím, akkor X eloszlása előáll, mint két egészértékű eloszlás konvolúciója.

2.HF: (Beadandó: március 12)

HF 2.1•••• Legyen X egy $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Jelöljük eloszlásának generátorfüggvényét $P(z)$-vel. Írjuk fel az $a_n := \mathbf{P}\{X \leq n\}$, $b_n := \mathbf{P}\{X < n\}$, $c_n := \mathbf{P}\{X \geq n\}$, $d_n := \mathbf{P}\{X > n+1\}$ és $e_n := \mathbf{P}\{X = 2n\}$ számsorozatok generátorfüggvényeit. (Figyelem: ezek nem eloszlások.)

HF 2.2••• Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) := \mathbf{P}\{X_i < x\}$. Legyen ν ezektől független, $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó; jelöljük $G(z)$-vel a ν eloszlásának generátorfüggvényét. Mutassuk meg, hogy az $Y := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

HF 2.3••• Legyen $A_0, A_1, \ldots A_n$ egy $(n+1)$-szögű konvex poligon a síkban. Legyen $a_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén jelölje a_n azt a számot, ahányféle különböző módon ezt a poligont $(n-1)$ háromszögre tudjuk bontani, $(n-2)$ egymást át nem metsző átló berajzolásával. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 2$ esetén fennáll a következő azonosság:

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

A fenti azonosság alapján határozzuk meg az a_n sorozat generátorfüggvényét.

Bónusz:• Az előbbi generátorfüggvény segítségével adjunk explicit kifejezést a_n-re.

HF 2.4••• Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független (optimista, azaz a siker sorszámát tekintjük) Geom(p_1) eloszlású valószínűségi változók, és ν egy tőlük független, (szintén optimista) Geom(p_2) eloszlású valószínűségi változó. Lássuk be generátorfüggvény-módszerrel, hogy

$$\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \text{Geom}(p_1 p_2).$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet is a kapott formulának.

HF 2.5•••• Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

a) az időskálát fix és oszthatatlan egy másodpercnyi időegységekre osztjuk,

b) feltesszük, hogy $p \in (0, 1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,

c) továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább négy másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a következő négy másodpercben lesz-e forgalom.) Határozzuk meg a gyalogos várakozási idejének generátorfüggvényét! *Segítség: Alkalmazuk a teljes várhatóérték tételét (avagy toronyszabályt) arra vonatkozóan, hogy az első kocsi mikor érkezik!*

HF 2.6••• Egy pók $p_k = \frac{1}{\log\frac{3}{2}} \frac{3^{-k}}{k}$ valószínűséggel rak k darab petét $k = 1, 2, \ldots$ esetén (tehát biztosan rak legalább egy petét).

a) Határozzuk meg a lerakott peték számának generátorfüggvényét!

b) Minden egyes pete a többitől és a peték számától függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kel ki. Határozzuk meg a kikelt peték számának generátorfüggvényét, várható értékét és annak a valószínűségét, hogy pontosan egy kikelt utóda lesz a póknak!

3.HF: (Beadandó: március 26)

HF 3.1•••• Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{P}\{\zeta_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$ egyszerű, szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n. Legyen $\tau = \min\{n \mid S_n = 1\}$ az első szint elérési ideje. Határozzuk meg $\mathbf{P}\{\tau = k\}$ értékét!

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{P}\{\tau = k\} = ?$$

HF 3.2•••• Tekintsük $\mathbb{Z}$ helyett a (végtelen) $\mathbb{G}_g$, g-ed fokú homogén fát mint alapgráfot és rajta a szimmetrikus bolyongást. Azaz: S_n egy véletlen bolyongás $\mathbb{G}_g$-n, amely egy megjelölt csúcsról (origóról) indul és időegységenként lép az aktuális hely g szomszédja közül egyet egyenletes g^{-1} valószínűséggel választva. Számoljuk ki a Φ, F, L generátorfüggvényeket. ($\Phi(z)$: egy kijelölt első szomszéd elérési idejének generátorfüggvénye, $F(z)$: origóba való első viszatéés idejének generátorfüggvénye; $L(z)$: origóba való utolsó látogatás idejének generátorfüggvénye.)

HF 3.3••• Jelölje $\theta(p)$ annak a valószínűségét, hogy soha nem pusztul ki egy olyan elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása Pesszimista Geom(p). Rajzoljuk fel a $p \mapsto \theta(p)$ függvény grafikonját.

HF 3.4••• Legyen $f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \leq 1$ és $f(x) = 0$, ha $|x| > 1$. Határozzuk meg az f sűrűségfüggvényű eloszlás karakterisztikus függvényét.

HF 3.5••• Legyen az X valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{a}{2}\, \mathrm{e}^{-a|x|},$$

ahol a pozitív konstans. Határozzuk meg az X valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.

HF 3.6••• Magyarázzuk a karakterisztikus függvények segítségével a

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t/2}{t/2}\cos t/2$$

azonosságot.

Bónusz:•• Bizonyítsuk be valószínűségszámítási úton a

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{t}{2^k}$$

azonosságot.

4.HF: (Beadandó: április 9)

HF 4.1••• Legyenek X és Y független, Exp(λ) eloszlású valószínűségi változók, és tőlük függetlenül

$$Z = \begin{cases} 1, & 1/2 \text{ valószínűséggel,} \\ -1, & 1/2 \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $X - Y$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye megegyezik a $Z \cdot X$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényével. Azaz: $X - Y \stackrel{\text{d}}{=} Z \cdot X$; próbáljuk meg megmagyarázni ezt a tényt valószínűségszámítási terminusokban is. (Vajon mért pont exponenciális változókkal működik?)

HF 4.2••• Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

a) Ésszerű-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát.

b) Vasárnap este üres volt az újságkupac. Mekkora valószínűséggel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban? Számítsuk ki esetszétválasztással és mátrixhatványozással is.

HF 4.3••• Írjuk le egy olyan elágazó folyamat átmenet mátrixát, amelyben az egyes egyedek leszármazottainak száma (pesszimista) geometriai eloszlású. (E Markov lánc állapottere nem véges, hanem megszámlálható végtelen – no de sebaj!)

HF 4.4••• **(Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre.)** Két urnában vannak golyóink: N darab mindkettőben. A golyók közül N kék és N piros. A golyókat a következőképpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek száma változhat.) Írjuk le a folyamat S állapotterét és P átmenetmátrixát.

HF 4.5•••• A ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}\{\xi_t = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{\xi_t = -1\}$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:

a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);

b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_t$;

c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.

A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

HF 4.6•••• Legyen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata,

$$g : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\} \qquad \text{és} \qquad f : \{1, 2, \ldots, N\} \times \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$$

rögzített (mérhető) függvények. Értelmezzük az X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ folyamatot a következőképpen: $X_0 = g(\xi_0)$, $X_{t+1} = f(X_t, \xi_{t+1})$. Markov láncot alkot-e az X_t sorozat? Ha igen, adjuk meg az átmenet-mátrixát (a ξ_t valószínűségi változók közös eloszlásának és az f és g függvények ismeretében).

5.HF: (Beadandó: április 23)

HF 5.1•••• Legyenek az $Y_1, Y_2, \ldots$ független és azonos E$(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen $X_k = kY_k$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Bizonyítsunk NSZGYT-t és CHT-t az S_n valószínűségi változó sorozatra.

HF 5.2••• Legyen $X_p \sim$Pesszimista Geom(p). Lássuk be karakterisztikus függvény-módszerrel, hogy $p \cdot X_p$ határeloszlása Exp(1), ahogy $p \searrow 0$.

HF 5.3••• Mutassuk meg, hogy a Pesszimista Negatív Binomiális(r, p) eloszlás gyengén konvergál a Poi(λ) eloszláshoz, ha $r \to \infty$ (a sokadik sikerre várunk) úgy, hogy $r \cdot (1-p) \to \lambda$ (a siker valószínűsége így tart 1-hez).

HF 5.4••• Osztályozzuk az alábbi Markov láncok állapotait:

a)

$$S = \{1, 2, 3\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$S = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

d)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

HF 5.5••• Egy szabályos érmét dobálok. Várhatóan hányszor kell feldobnom az érmét, hogy FFF-et lássak? És hogy FIF-et lássak?

Segítség: érdemes egy nyolc állapotú állapotteret felrajzolni. (A harmadik érmedobás után van csak értelme állapotokról beszélni). Használhatunk Maple-t vagy Mathematica-t az adódó egyenletrendszer megoldására.

HF 5.6•••• Tekintsünk egy egyszerű bolyongást azon a gráfon aminek a csúcsai A, B, C, D, E és élei: AB, AC, BC, CD, BD, BE, DE.

a) Tegyük fel, hogy a bolyongó az A csúcsból indul. Mennyi a C csúcs első eléréséig megtett lépések számának várható értéke?

b) Tegyük fel, hogy a bolyongó a C csúcsból indul. Mennyi az első visszatérésig megtett lépések számának várható értéke? (*Pl. az első lépésre való feltételezéssel ezt is meg tudjuk csinálni.*)

c) Tegyük fel, hogy a bolyongó az A csúcsból indul. Várhatóan hányszor jár E-ben mielőtt először elérné a C csúcsot?

d) Tegyük fel, hogy a bolyongó a B csúcsból indul. Mennyi annak a valószínűsége, hogy előbb éri el az A csúcsot, mint a C csúcsot?

6.HF: (Beadandó: május 7)

HF 6.1••• Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?

b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?

HF 6.2•••• (Ehrenfest urna modell.) Egy vizslán és egy labradoron összesen N bolha van. Minden időpillanatban egy véletlenül választott bolha átugrik az egyik kutyáról a másikra. Határozzuk meg a modell stacionárius eloszlását.

HF 6.3••• (Bernoulli-Laplace keverési modell) Két urnában szétosztunk N fehér és N feket golyót úgy, hogy mindegyik urnába N golyó kerüljön. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy-egy golyót mindkét urnából, és kicseréljük őket. Jelölje X_n az első urnában lévő fehér golyók számát az n. lépés után.

a) Mutassuk meg, hogy X_n Markov lánc, és írjuk fel az egylépéses átmenetvalószínűségek mátrixát.

b) Mutassuk meg, hogy az egyetlen stacionárius eloszlás

$$\pi(k) = \frac{\binom{N}{k}^2}{\binom{2N}{N}}.$$

HF 6.4••• Tekintsünk egy elágazó folyamatot, melynél egy szülő gyermekei számának eloszlása $\big(p_i\big)_{i=0}^{\infty}$. Ebből irreducibilis Markov láncot csinálunk úgy, hogy ha a populáció kihal, a következő lépésben egy új egyedet ültetünk be kívülről. Mely $\big(p_i\big)_{i=0}^{\infty}$ eloszlásokra lesz az így értelmezett Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens?

HF 6.5•••• Legyenek $X_1,\, X_2,\, X_3,\, \dots$ független és azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók, melyeknek van várható értékük és $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

(Azaz: S_n bolyongás $\mathbb{Z}$-n, melynek egymásutáni lépései $X_1,\, X_2,\, \dots$.) Legyen továbbá

$$G_n(x) := \mathbf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{1}_{\{S_j = x\}}\Big),$$

a $[0,\, n]$ időintervallumban az x rácsponton töltött részidő várható értéke. (E függvényt a bolyongás Green-függvényének nevezzük.)

a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$G_n(0) \geq G_n(x).$$

Útmutatás: Tekintsük az x rácspont első elérésének idejét.

b) Emlékezzünk a Nagy Számok Gyenge Törvényére: bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(|S_n| < \varepsilon n\Big) = 1.$$

Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy rögzített $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|x|<\varepsilon n} G_n(x) = 1.$$

c) Az (a) és (b) pontok eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = \infty.$$

d) A fentiek alapján lássuk be, hogy az S_n Markov lánc rekurrens.

e) Alkalmazható-e a fenti okoskodás magasabb dimenziós bolyongásra?

HF 6.6••• A $P = (P_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ sztochasztikus mátrixot *duplán sztochasztikusnak* vagy *bisztochasztikusnak* nevezzük, ha nem csak sorösszegei, hanem oszlop-összegei is egyenlőek 1-el. Legyen az X_t Markov lánc irreducibilis az $S = \{1,\, 2,\, \dots,\, N\}$ állapot-halmazon és átmenetvalószínűségeinek mátrixa bisztochasztikus. Mutassuk meg, hogy az X_t Markov lánc stacionárius eloszlása egyenletes az S halmazon, és fordítva: ha a stacionárius eloszlás egyenletes, akkor az átmenetmátrix bisztochasztikus.

Bónusz:•••• Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma n-kor. Minden $(n,\, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ időintervallumban $p \in (0,\, 1)$ valószínűséggel egy új vásárló érkezik és a sor végére áll. Ettől függetlenül, ugyanebben az időintervallumban a sor elején álló vásárlót $q \in (0,\, 1)$ valószínűséggel kiszolgálják és ő elhagyja a sort. Legfeljebb egy új vásárló érkezhet és legfeljebb egy vásárlót szolgálnak ki egységnyi időintervallumonként. A különböző időintervallumokban történő események egymástól függetlenek.

a) Markov lánc-e az X_n folyamat? Ha igen, írjuk le az állapotterét és átmenetmátrixát és állapítsuk meg, hogy irreducibilis-e, illetve, aperiodikus-e.

b) Mely $(p,\, q)$ paraméter értékekre lesz az X_n Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens illetve tranziens?

c) A pozitív rekurrens esetben határozzuk meg a Markov lánc π stacionárius (invariáns) eloszlását. Mennyi a sor átlagos hossza a stacionárius állapotban?

d) A tranziens esetben határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy kezdetben j hosszú sorral indulva, valaha is kiürül a sor.

Bónusz:•••••• Alább három Markov lánc szóban és hozzá három eloszlás. Írjuk fel a Markov láncok állapottereit, átmenetvalószínűségeit, és igazoljuk, hogy a megfelelő eloszlások a stacionáriusak.

a) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit. **Fermi-Dirac eloszlás:** k golyót véletlenszerűen elosztunk $n \geq k$ urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet.

b) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:** k megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

c) n, körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Bose-Einstein eloszlás:** k megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.